Diferenciální rovnice

(Obyčejná) diferenciální rovnice n-tého řádu:

$$\boxed{F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0}$$

Řešení na intervalu I: funkce $y\colon I \to \mathbb{R}$ taková, že pro každé $x \in I$ je $F\big(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\big) = 0$.

Maximální řešení: neexistuje řešení na větším intervalu.

Cauchyova úloha: navíc *počáteční podmínky*

$$y(x_0) = y_{0,0}, \quad y'(x_0) = y_{0,1}, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}$$

Cauchyova úloha je *jednoznačně řešitelná*, jestliže každá dvě řešení splývají na některém okolí x_0.

Věta. *Mějme Cauchyovu úlohu $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Jestliže existují intervaly $I \ni x_0$, $J \ni y_0$ takové, že f je spojitá na $I \times J$, pak existuje řešení Cauchyovy úlohy na některém intervalu $I' \subset I$. Je-li navíc $\frac{\partial f}{\partial y}$ omezená na $I \times J$, pak je Cauchyova úloha jednoznačně řešitelná.*

DR 1. řádu se separovanými proměnými

$$\boxed{y' = g(x)\, h(y)}$$

Předpoklady: g spojitá na intervalu I, h spojitá na intervalu J.

1) $h(y_1) = 0 \dots \quad y(x) = y_1$, $x \in I$ je *stacionární* řešení
2) $h(y) \neq 0$

$$\begin{aligned} y'(x) &= g(x)\, h\big(y(x)\big) \\ \int \frac{y'(x)}{h\big(y(x)\big)}\, \mathrm{d}x &= \int g(x)\, \mathrm{d}x \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} &= \int g(x)\, \mathrm{d}x \ (+\, c) \\ y(x) &= \dots \end{aligned}$$

Cauchyova úloha

Dopočítat c nebo

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int_{x_0}^{x} g(x)\, \mathrm{d}x$$

Obecný postup:
1) Maximální intervaly spojitosti g (I).
2) Stacionární řešení $y(x) = y_1$, $x \in I$ pro $h(y_1) = 0$.
3) Maximální intervaly spojitosti a nenulovosti h (J).
4) Pro $(x_0, y_0) \in I \times J$, existuje řešení uvnitř $I \times J$.

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

$$\boxed{a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x)}$$

Předpoklady: a_1, a_0, f spojité na intervalu I, $a_1 \neq 0$ na I. Cauchyova úloha má pak právě jedno řešení na I.

$D\colon y \mapsto a_1 y' + a_0 y$ je lineární zobrazení na prostoru funkcí diferencovatelných na I.

Přidružená homogenní rovnice: $a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0$. Množina řešení je jádro lineárního zobrazení D.

Obecné řešení: $y(x) = \tilde{y}(x) + \hat{y}(x)$, kde $\tilde{y}$ je obecné řešení přidružené homogenní rovnice a $\hat{y}$ je jedno (*partikulární*) řešení původní rovnice.

$$\boxed{y' + p(x)\, y = q(x)}$$

Homogenní LDR 1. řádu

$$\boxed{y' + p(x)\, y = 0}$$

Řešíme separací proměnných:

$$y(x) = c\, \mathrm{e}^{-\int p(x)\, \mathrm{d}x}, \quad x \in I, \qquad (c \in \mathbb{R})$$

Nehomogenní LDR 1. řádu

$$\boxed{y' + p(x)\, y = q(x)}$$

Metoda *variace konstanty*: hledáme partikulární řešení ve tvaru obecného řešení přidružené homogenní rovnice, ve kterém konstantu nahradíme funkcí.

$$\hat{y}(x) = c(x)\, \mathrm{e}^{-\int p(x)}$$

Dosadíme do rovnice a spočítáme $c(x)$:

$$\begin{aligned} c'(x)\, \mathrm{e}^{-\int p(x)} - c(x)\, \mathrm{e}^{-\int p(x)}\, p(x) + p(x)\, c(x)\, \mathrm{e}^{-\int p(x)} &= q(x) \\ c'(x) &= q(x)\, \mathrm{e}^{\int p(x)} \\ c(x) &= \int q(x)\, \mathrm{e}^{\int p(x)} \\ \hat{y}(x) &= \mathrm{e}^{-\int p(x)} \cdot \int q(x)\, \mathrm{e}^{\int p(x)} \end{aligned}$$

Cauchyova úloha pro LDR 1. řádu

$$\boxed{\begin{aligned} y' + p(x)\, y &= q(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}}$$

1) Obecné řešení přidružené homogenní rovnice separací proměnných.
2) Partikulární řešení metodou variace konstanty, obecné řešení dané LDR.
3) Určení konstanty dosazením počáteční podmínky.

Lineární diferenciální rovnice

$$\boxed{y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x)}$$

Věta. *Jsou li $a_{n-1}, \ldots, a_0, f$ spojité funkce na intervalu I, pak Cauchyova úloha má právě jedno řešení na I.*

Homogenní LDR ($f(x) = 0$ na I)

Věta. *Množina řešení homogenní LDR řádu n tvoří lineární prostor dimenze n.*

Důkaz. $D\colon y \mapsto y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0$ je lineární zobrazení, množina řešení je jeho jádro, tj. lineární prostor.

$y(x_0)$	$y'(x_0)$	$\ldots$	$y^{(n-1)}(x_0)$		řešení C. úlohy
1	0	$\ldots$	0	$\to$	$y_0(x)$
0	1	$\ldots$	0	$\to$	$y_1(x)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	$\ldots$	1	$\to$	$y_{n-1}(x)$
$y_{0,0}$	$y_{0,1}$	$\cdots$	$y_{0,n-1}$	$\to$	$\sum_{i=0}^{n-1} y_{0,i} y_i(x)$

$\Rightarrow$ lineární obal $\{y_0(x), \ldots, y_{n-1}(x)\}$ je celý prostor řešení

$$a_0 y_0(x) + \cdots + a_{n-1} y_{n-1}(x) = 0 \xrightarrow{x=x_0} a_0 = 0$$
$${}'\colon a_0 y_0'(x) + \cdots + a_{n-1} y_{n-1}'(x) = 0 \xrightarrow{x=x_0} a_1 = 0 \quad \ldots$$

$\Rightarrow$ funkce $y_0(x), \ldots, y_{n-1}(x)$ jsou lineárně nezávislé

Definice. Báze množiny řešení homogenní LDR se nazývá *fundamentální systém* řešení.

Věta. *Nechť $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ jsou řešení homogenní LDR řádu n. pak tyto funkce jsou lineárně nezávislé na intervalu I právě tehdy, když pro každé $x \in I$ je následující determinant (*Wronského, wronskián*) nenulový:*

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Důkaz. 1) Jsou-li funkce závislé, pak některá y_i je lineární kombinací ostatních, y_i' je stejnou kombinací derivací ostatních, ... i-tý sloupec determinantu je kombinací ostatních, tj. determinant je nulový pro každé $x \in I$.
2) Je-li determinant nulový v x_0, pak soustava s touto maticí má netriviální řešení $(a_1, \ldots, a_n)$, $a_1 y_1(x) + \cdots + a_n y_n(x)$ je řešení s nulovými počátečními podmínkami v x_0, tj. nulové, tj. dané funkce jsou závislé.

Poznámka. Věta neplatí, pokud funkce nejsou řešením jedné LDR.

Nehomogenní LDR

Věta. *1) Je-li $\hat{y}$ řešení LDR a $\tilde{y}$ řešení její přidružené homogenní rovnice, pak $\hat{y} + \tilde{y}$ je řešení dané LDR.*
2) Jsou-li $\hat{y}_1, \hat{y}_2$ řešení LDR, pak $\hat{y}_1 - \hat{y}_2$ je řešení přidružené homogenní rovnice.
*3) Jsou-li $\hat{y}_1, \hat{y}_2$ řešení pro pravé strany f_1, f_2, pak $\hat{y}_1 + \hat{y}_2$ je řešení pro pravou stranu $f_1 + f_2$ (*princip superpozice*).*

LDR s konstantními koeficienty

$$\boxed{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)}$$

Předpoklady: $a_n \neq 0$, f je spojitá na intervalu.

Homogenní LDR s konstantními koeficienty

Charakteristická rovnice:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0\,.$$

Věta. *1) Je-li λ reálný kořen charakteristické rovnice násobnosti k, pak funkce*

$$\mathrm{e}^{\lambda x}, \quad x\,\mathrm{e}^{\lambda x}, \quad \ldots, \quad x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\lambda x}$$

jsou řešením příslušné homogenní LDR.
2) Je-li $\alpha + \beta\,\mathrm{j}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ imaginární kořen charakteristické rovnice násobnosti k, pak funkce

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x, \quad x\,\mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x, \quad \ldots, \quad x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x, \\ &\mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x, \quad x\,\mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x, \quad \ldots, \quad x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x, \end{aligned}$$

jsou řešením příslušné homogenní LDR.
3) Všechna tato řešení tvoří fundamentální systém řešení.

Nehomogenní LDR s konstantními koeficienty

Hledáme partikulární řešení.

1) *Variace konstant*:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x) &= c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) \\ \hat{y}(x) &= c_1(x)\, y_1(x) + \cdots + c_n(x)\, y_n(x) \\ \hat{y}'(x) &= c_1(x)\, y_1'(x) + \cdots + c_n(x)\, y_n'(x) \\ &\quad + \underbrace{c_1'(x)\, y_1(x) + \cdots + c_n'(x)\, y_n(x)}_{=0} \\ \hat{y}''(x) &= c_1(x)\, y_1''(x) + \cdots + c_n(x)\, y_n''(x) \\ &\quad + \underbrace{c_1'(x)\, y_1'(x) + \cdots + c_n'(x)\, y_n'(x)}_{=0} \\ &\vdots \\ \hat{y}^{(n)}(x) &= c_1(x)\, y_1^{(n)}(x) + \cdots + c_n(x)\, y_n^{(n)}(x) \\ &\quad + c_1'(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)\, y_n^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

2) *Metoda odhadu* pro kvazipolynomiální pravou stranu: Jsou-li P, Q polynomy stupně nejvýše m, $(\alpha + \beta\,\mathrm{j})$ k-násobný kořen charakteristického polynomu,

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} \big(P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x \big),$$

pak existuje partikulární řešení ve tvaru

$$\hat{y}(x) = x^k\,\mathrm{e}^{\alpha x} \big(\hat{P}(x) \cos \beta x + \hat{Q}(x) \sin \beta x \big),$$

kde $\hat{P}, \hat{Q}$ jsou polynomy stupně nejvýše m.