

# Matematika 2

(Josef Tkadlec, 2001/02)

Osnova ke zkoušce ( $n$  značí znalost „na“ příslušnou známku)

**1. Obyčejné diferenciální rovnice.** Diferenciální rovnice 1. řádu se separovanými proměnnými: stacionární řešení, separace proměnných. Lineární diferenciální rovnice 1. řádu: struktura množiny řešení (obecné řešení homogenní + partikulární řešení), variace konstanty. Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty: struktura množiny řešení (lineární kombinace řešení z fundamentálního systému + partikulární), charakteristický polynom, charakteristická rovnice, metoda odhadu, variace konstant. Počáteční podmínky, existence a jednoznačnost řešení.

**2. Laplaceova transformace.** Funkce exponenciálního řádu, předmět standardního typu, konvoluce, Heavisideova funkce, konečný impuls. Obrazy polynomů,  $e^{at}$ ,  $\cos \omega t$ ,  $\sin \omega t$ . Věta o existenci obrazu (důkaz<sup>1</sup>), o linearitě, o derivaci a integraci obrazu, o substituci (posunu) v obrazu (důkaz<sup>2</sup>), o změně měřítka (důkaz<sup>2</sup>), o obrazu derivace (důkaz<sup>1</sup>), integrálu a konvoluce, o translaci. Zpětná Laplaceova transformace pro součin racionální a exponenciální funkce. Řešení diferenciálních a integro-diferenciálních rovnic a jejich soustav pomocí Laplaceovy transformace.

**3. Funkce více proměnných.** Okolí a prstencové okolí v  $\mathbb{R}^n$ ; otevřená, uzavřená, souvislá množina, oblast. Posloupnost v  $\mathbb{R}^n$  a její limita, věta o konvergenci po složkách. Funkce více proměnných, graf funkce, hladina konstantnosti funkce, řez grafu, limita a spojitost funkce. Vektorová funkce.

**4. Diferenciální počet funkcí více proměnných.** Parciální derivace, derivace ve směru, totální diferenciál; zobecnění Lagrangeovy věty (důkaz<sup>2</sup>), věta o existenci diferenciálu, o výpočtu derivace ve směru pomocí diferenciálu (důkaz<sup>1</sup>), o konstantnosti funkce s nulovým gradientem (důkaz<sup>1</sup>), o diferenciálu a derivaci ve směru pro složenou funkci; parciální derivace vyšších řádů (smíšené/nesmíšené), funkce třídy  $C^k$ , věta o záměnnosti pořadí derivování, druhý diferenciál; gradient funkce, Jacobiho matice vektorové funkce, Hessova matice 2. diferenciálu.

Normálový vektor a tečná nadrovina grafu funkce. Věta o Taylorově polynomu. Transformace diferenciálních výrazů, regulární zobrazení. Extrémy funkcí více proměnných: lokální (stacionární bod, pozitivně definitní/negativně definitní/indefinitní 2. diferenciál, význam pro lokální extrémy, Sylvestrovo kritérium), vázané (Lagrangeova metoda multiplikátorů), maximum a minimum (věta o existenci). Funkce zadané implicitně (i více najednou) a jejich derivace.

**5. Číselné řady.** Částečný součet a součet řady, (absolutně) konvergentní, divergentní a oscilující řada; nutná podmínka konvergence, kritéria konvergence: srovnávací, podílové (důkaz<sup>2</sup>), odmocninové (důkaz<sup>2</sup>), integrální (důkaz<sup>1</sup>), Leibnizovo; absolutně konvergentní řada konverguje, lze ji přerovnat, roztrhnout; aritmetická, geometrická a harmonická řada.