Matematika 2

(Josef Tkadlec, 2001/02)

Vybrané typy příkladů ke zkoušce

1. Řešte rovnici

$$y' = \frac{y^2-1}{2x}\,, \qquad \text{a) } y(1)=0\,, \quad \text{b) } y(1)=-1\,, \quad \text{c) } y(0)=1\,.$$

Výsledek: a) $y(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $x \in (0,+\infty)$, b) $y(x) = -1$, $x \in (0,+\infty)$, c) nemá řešení.

2. Řešte rovnici

$$y' + \tfrac{1}{x}\,y = 1\,, \qquad \text{a) } y(0)=2\,, \quad \text{b) } y(1)=2\,.$$

Výsledek: a) nemá řešení, b) $y(x) = \frac{1}{2}\,x + \frac{3}{2x}$, $x \in (0,+\infty)$.

3. Řešte rovnici

$$y'' + y = \tfrac{1}{\cos x}\,, \qquad y(0)=1\,, \quad y'(0)=2\,.$$

Výsledek: $y(x) = \ln\cos x \cdot \cos x + x\sin x + \cos x + 2\sin x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

4. Řešte rovnici

$$y'' + y = 2 + 3\sin 2x - 6\cos 2x\,, \qquad y(\tfrac{\pi}{2})=1\,, \quad y'(\tfrac{\pi}{2})=4\,.$$

Výsledek: $y(x) = 2 - \sin 2x + 2\cos 2x + \sin x - 2\cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

5. Pomocí Laplaceovy transformace řešte rovnici

$$\ddot{x} + 4x = \begin{cases} 4\,, & t \in \langle 0, \frac{\pi}{4}),\\ 0\,, & t \in \langle \frac{\pi}{4}, +\infty), \end{cases} \qquad x(0+)=1\,, \quad \dot{x}(0+)=-2\,.$$

Výsledek:

$$x(t) = \begin{cases} 1-\sin 2t\,, & t \in \langle 0, \frac{\pi}{4})\,,\\ 0\,, & t \in \langle \frac{\pi}{4}, +\infty)\,. \end{cases}$$

6. Pomocí Laplaceovy transformace řešte rovnici

$$\dot{x} + 4x + 13\int_0^t x(u)\,\mathrm{d}u = 0\,, \qquad x(0+)=1\,.$$

Výsledek: $x(t) = \mathrm{e}^{-2t}(\cos 3t - \frac{2}{3}\sin 3t)$.

7. Pomocí Laplaceovy transformace řešte rovnici

$$\dot{x} + x - \int_0^t \sin(t-u)\,x(u)\,\mathrm{d}u = \cos t\,, \qquad x(0+)=0\,.$$

Výsledek: $x(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$.

8. Určete a načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \ln\sqrt{(2-x)(3y-9)}$. Určete gradient a 1. diferenciál f v bodech $(1,2)$ a $(3,1)$ a tečné roviny grafu f v příslušných bodech.

Výsledek: $D(f) = (-\infty,2)\times(3,+\infty)\cup(2,+\infty)\times(-\infty,3)$, $(1,2)\notin D(f)$, $\operatorname{grad} f(3,1) = (\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$, $\mathrm{d}f(3,1)(h_1,h_2) = \frac{1}{2}h_1 - \frac{1}{4}h_2$, $2x-y-4z = 5-2\ln 6$ v bodě $(3,1,\ln\sqrt{6})$.

9. Určete Taylorův polynom 3. stupně funkce $f(x,y) = x^y$ v bodě $(1,1)$.

Výsledek: $T(x,y) = 1+(x-1)+(x-1)(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)$.

10. Určete lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x^3+y^2+\frac{1}{2}z^2-3xz-2y+2z$.

Výsledek: Lokální minimum $f(2,1,4) = -1$.

11. Určete vázané lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2+y^2$ na množině $M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^3+y^3=1,\ x>0,\ y>0\}$.

Výsledek: Vázané lokální maximum $f(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\frac{1}{\sqrt[3]{2}}) = \sqrt[3]{2}$.

12. Určete maximum a minimum funkce $f(x,y) = x^2+y^2-6x-4y+11$ na množině $M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2-4x\le 5\}$.

Výsledek: Minimum $f(3,2) = -2$, maximum $f(2-\frac{3}{\sqrt{5}},-\frac{6}{\sqrt{5}}) = 12+6\sqrt{5}$.

13. Určete extrémy funkce $z = f(x,y)$ zadané implicitně rovnicí $x^2-y^2+z^3+4x+2y-3z^2+3=0$.

Výsledek: Nemá extrémy ($(-2,1,0)$ nevyhovuje podmínce pro implicitně zadanou funkci, pro $(-2,1,3)$ je druhý diferenciál indefinitní).

14. Transformujte do proměnných u,v:

$$x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\,,\qquad u = xy\,,\quad v = \frac{x}{y}\,.$$

Výsledek: $2uv\,\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} - v\,\frac{\partial g}{\partial v} = 0$.

15. Transformujte do proměnných u,v:

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0\,,\qquad x = \sin u\,,\quad y = v\,.$$

Výsledek: $\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial g}{\partial v} = 0$.

16. Ověřte, že vztahy $x+y-u-v=0$, $ux+vy-2=0$ jsou v okolí bodu $(1,-1)$ definovány funkce $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ splňující podmínku $u(1,-1)=1$, $v(1,-1)=-1$. Určete $\operatorname{grad} u(1,-1)$.

Výsledek: $\operatorname{grad} u(1,-1) = (0,1)$.

17. Napište definici absolutně konvergentní řady. Rozhodněte, zda je řada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k+2}$ konvergentní a absolutně konvergentní.

Výsledek: Je konvergentní, ale ne absolutně.