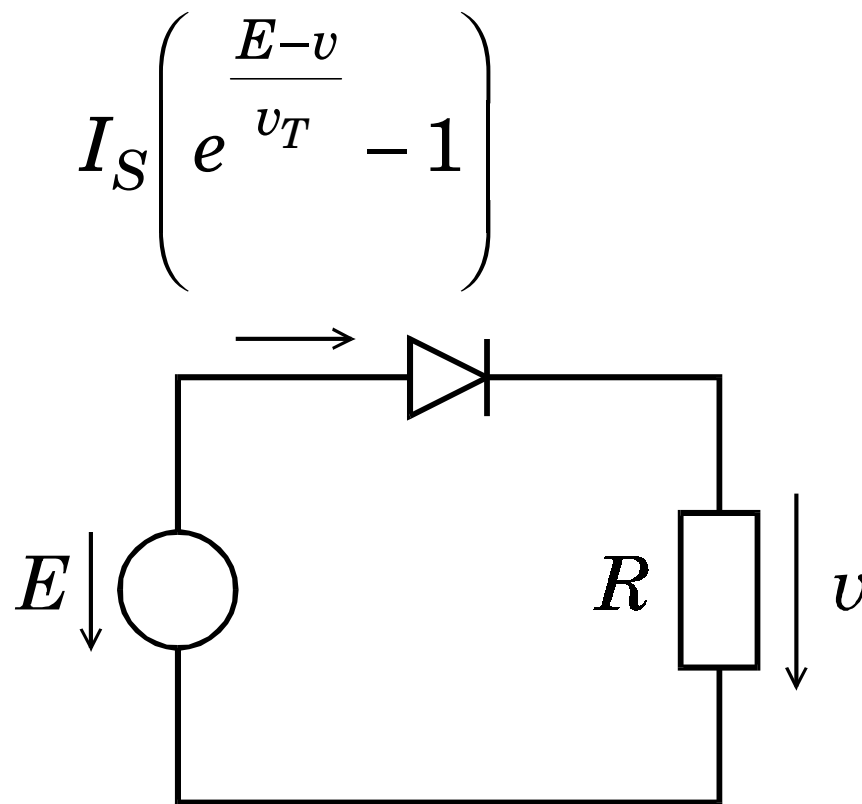


Řešení soustavy nelineárních algebro-diferenciálních rovnic

1. Řešení algebraických nelineárních rovnic



parametry obvodu:

$$I_S = 10^{-15} \text{ A}, v_T = 25 \text{ mV}, E = 2 \text{ V a } R = 1 \text{ k}\Omega$$

obvod lze popsat jednoduchou nelineární rovnicí:

$$I_S \left(e^{\frac{E-v}{v_T}} - 1 \right) - \frac{v}{R} = 0$$
$$f(v) = 0$$

obvod řešíme klasickou Newtonovou metodou

$$f'^{(j)} \Delta v^{(j)} = -f^{(j)}$$
$$v^{(j+1)} = v^{(j)} + \Delta v^{(j)}$$

v našem případě:

$$f^{(j)} = I_S \left[e^{\frac{E - v^{(j)}}{v_T}} - 1 \right] - \frac{v^{(j)}}{R},$$

$$f'^{(j)} = -\frac{I_S}{v_T} e^{\frac{E - v^{(j)}}{v_T}} - \frac{1}{R}$$

Napětí na otevřené diodě odhadněme 0,65 V a zkusme tedy provést iterativní proces **se startovní hodnotou 1,35 V**. V deváté iteraci je již hodnota opravy velmi malá; řešení po **devíti** iteracích je 1,303 V.

Zkusme však nyní odstartovat iterační proces hodnotou **1,5 V**. Řešení konverguje rovněž k 1,303 V tentokrát až po **56** iteracích. Mnohem závažnější je, že výsledek první iterace **0,029 V** vyžaduje v druhé iteraci vyčíslení výrazu

$$e^{\frac{E-v^{(1)}}{v_T}}$$

který nabude hodnoty **$1,735 \cdot 10^{34}$** ! Vynikajícím řešením problému je **logaritmické tlumení divergence**:

$$v^{(j+1)} = v^{(j)} + \text{sign}(\Delta v^{(j)}) \ln\left(1 + \left|\Delta v^{(j)}\right|\right)$$

místo

$$v^{(j+1)} = v^{(j)} + \Delta v^{(j)}$$

Logaritmické tlumení divergence je založeno na rozvoji

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

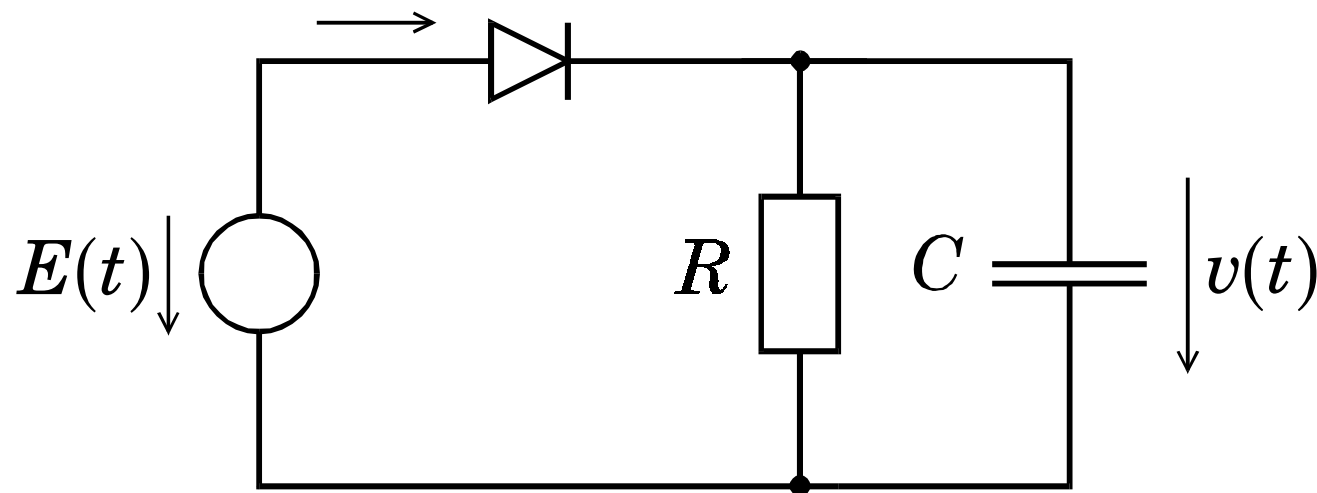
Vraťme se nyní k našemu příkladu a tentokrát provádějme iterační proces s logaritmickým tlumením divergence. Výsledek první iterace je zde **0,5954 V** a výraz

$$\frac{E - v^{(1)}}{e^{v_T}}$$

nabývá tentokrát hodnoty jen **$2,515 \cdot 10^{24}$** , k řešení úlohy je nyní třeba pouze **34 iterací**.

2. Řešení algebro-diferenciálních nelineárních rovnic
k původnímu obvodu se přidá kapacitor a budící
zdroj se stane časově proměnným:

$$I_S \left[e^{\frac{E(t)-v(t)}{v_T}} - 1 \right]$$



implicitní algebro-diferenciální rovnice obvodu:

$$I_S \left[e^{\frac{E(t)-v(t)}{v_T}} - 1 \right] - \frac{v(t)}{R} - C\dot{v}(t) = 0$$

$$f(v(t), \dot{v}(t), t) = 0$$

předpokládejme, že již známe řešení n -tého časového kroku procesu numerické integrace. Předpověď hodnoty napětí v následujícím časovém kroku ($n+1$) je určena **prediktorem** - **explicitní** Eulerovou metodou:

$$v_{n+1}^{(0)} = v_n + \dot{v}_n (t_{n+1} - t_n)$$

$$\dot{v}_{n+1}^{(0)} = \dot{v}_n$$

oprava hodnoty napětí v tomto kroku je určena **ko-
rektorem** (oprávcem) - iteracemi Newtonovy metody:

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)_{n+1}^{(j)} + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{v}} \right)_{n+1}^{(j)} \left(\frac{d\dot{v}}{dv} \right)_{n+1} \right] \Delta v_{n+1}^{(j)} = -f_{n+1}^{(j)}$$

tentokrát s použitím **implicitní** Eulerovy metody:

$$v_{n+1}^{(j)} = v_n + \dot{v}_{n+1}^{(j)} (t_{n+1} - t_n)$$

čili

$$\left(\frac{d\dot{v}}{dv} \right)_{n+1} = \frac{1}{t_{n+1} - t_n}$$

pro náš konkrétní obvod tedy dostaneme rovnice:

$$f_{n+1}^{(j)} = I_S \left[e^{\frac{E_{n+1} - v_{n+1}^{(j)}}{v_T}} - 1 \right] - \frac{v_{n+1}^{(j)}}{R} - C \dot{v}_{n+1}^{(j)},$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)_{n+1}^{(j)} = -\frac{I_S}{v_T} e^{\frac{E_{n+1} - v_{n+1}^{(j)}}{v_T}} - \frac{1}{R},$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{v}} \right)_{n+1}^{(j)} = -C.$$

po určení opravy $\Delta v_{n+1}^{(j)}$ se stanoví nejen následující hodnota napětí, nýbrž i následující hodnota derivace napětí podle času:

$$v_{n+1}^{(j+1)} = v_{n+1}^{(j)} + \Delta v_{n+1}^{(j)},$$

$$\dot{v}_{n+1}^{(j+1)} = \dot{v}_{n+1}^{(j)} + \frac{1}{t_{n+1} - t_n} \Delta v_{n+1}^{(j)}.$$

Numerická integrace programem MathViews

IS=1e-15; vT=25e-3; R=1000; C=1e-6

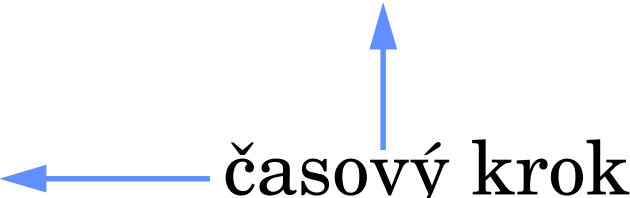
v=0; vdot=0



počáteční podmínka

```
j=0; t(j+1)=0; x(j+1)=v
j=1; while j<=300
    E=sin(j/100*2*3.1415926535)
    i=1; while i<=100
        f=IS*(exp((E-v)/vT)-1)-v/R-C*vdot
        dfdv=-IS/vT*exp((E-v)/vT)-1/R
        dfdvdot=-C
        dv=-f/(dfdv+dfdvdot/1e-5)
        v+=dv
        vdot+=dv/1e-5
```

časový krok



```
    if abs(dv)<1e-6
        i=101
    else
        i+=1
    end
end
t(j+1)=j*1e-5; x(j+1)=v
v+=vdot*1e-5
j+=1
end
plot(t,x)
```

↑
prediktor