Transformace diferenciálních výrazů

$f(x,y) \to g(u,v)$: $x, y, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \to u, v, \frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}$

I. Nové proměnné pomocí starých

$$\boxed{f(x,y)\,, \qquad u = u(x,y)\,, \quad v = v(x,y)}$$

Použijeme větu o derivaci složené funkce pro $f(x,y) = g\big(u(x,y), v(x,y)\big)$, spočteme staré proměnné:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\\
x &= x(u,v)\\
y &= y(u,v)
\end{aligned}$$

Příklad. $x\,\frac{\partial f}{\partial x} - y\,\frac{\partial f}{\partial y}$, $u = \frac{x}{y}$, $v = y$:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial f}{\partial x} &= \tfrac{\partial g}{\partial u}\cdot\tfrac{1}{y} + \tfrac{\partial g}{\partial v}\cdot 0\\
\tfrac{\partial f}{\partial y} &= \tfrac{\partial g}{\partial u}\cdot\tfrac{-x}{y^2} + \tfrac{\partial g}{\partial v}\cdot 1
\end{aligned}$$

$x = uv$, $y = v$:

$$x\,\tfrac{\partial f}{\partial x} - y\,\tfrac{\partial f}{\partial y} = \tfrac{2x}{y}\cdot\tfrac{\partial g}{\partial u} - y\,\tfrac{\partial g}{\partial v} = 2u\,\tfrac{\partial g}{\partial u} - v\,\tfrac{\partial g}{\partial v}$$

Věta. *Jacobiho matice inverzních vektorových funkcí jsou k sobě inverzní. (Pro regulární, tj. s nenulovým determinantem Jacobiho matice.)*

$$\begin{aligned}
\big(\tfrac{\partial f}{\partial x}, \tfrac{\partial f}{\partial y}\big) &= \big(\tfrac{\partial g}{\partial u}, \tfrac{\partial g}{\partial v}\big)\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}\\
\big(\tfrac{\partial g}{\partial u}, \tfrac{\partial g}{\partial v}\big) &= \big(\tfrac{\partial f}{\partial x}, \tfrac{\partial f}{\partial y}\big)\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Poznámka. Je to zobecnění věty o derivaci inverzní funkce jedné proměnné.

4. Použijeme větu o derivaci složené funkce pro f, parciální derivace nových proměnných podle starých spočítáme invertováním Jacobiho matice inverzní transformace.

Příklad. $x\,\frac{\partial f}{\partial x} - y\,\frac{\partial f}{\partial y}$, $x = uv$, $y = v$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} v & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{v} & 0\\ -\frac{u}{v} & 1\end{pmatrix}$$

II. Staré proměnné pomocí nových

$$\boxed{f(x,y)\,, \qquad x = x(u,v)\,, \quad y = y(u,v)}$$

1. Přepočítáme $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ a použijeme I.

Příklad. $x\,\frac{\partial f}{\partial x} - y\,\frac{\partial f}{\partial y}$, $x = uv$, $y = v$: $u = \frac{x}{y}$, $v = y$

2. Použijeme větu o derivaci složené funkce pro $g(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$, spočítáme parciální derivace f:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} & \qquad \frac{\partial f}{\partial x} &= \cdots\\
\frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} & \qquad \frac{\partial f}{\partial y} &= \cdots
\end{aligned}$$

Příklad. $x\,\frac{\partial f}{\partial x} - y\,\frac{\partial f}{\partial y}$, $x = uv$, $y = v$:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial g}{\partial u} &= \tfrac{\partial f}{\partial x}\cdot v + \tfrac{\partial f}{\partial y}\cdot 0 & \qquad \tfrac{\partial f}{\partial x} &= \tfrac{1}{v}\cdot\tfrac{\partial g}{\partial u}\\
\tfrac{\partial g}{\partial v} &= \tfrac{\partial f}{\partial x}\cdot u + \tfrac{\partial f}{\partial y}\cdot 1 & \qquad \tfrac{\partial f}{\partial y} &= \tfrac{\partial g}{\partial v} - \tfrac{u}{v}\cdot\tfrac{\partial g}{\partial u}
\end{aligned}$$

3. Použijeme větu o derivaci složené funkce pro f, parciální derivace nových proměnných podle starých spočítáme z derivací transformačních rovnic.

Příklad. $x\,\frac{\partial f}{\partial x} - y\,\frac{\partial f}{\partial y}$, $x = uv$, $y = v$
derivacemi transformačních rovnic dostaneme:

$$\begin{aligned}
1 &= \tfrac{\partial u}{\partial x}\cdot v + u\cdot\tfrac{\partial v}{\partial x} & \qquad 0 &= \tfrac{\partial u}{\partial y}\cdot v + u\cdot\tfrac{\partial v}{\partial y}\\
0 &= \tfrac{\partial v}{\partial x} & \qquad 1 &= \tfrac{\partial v}{\partial y}\\
\tfrac{\partial u}{\partial x} &= \tfrac{1}{v}\,, \quad \tfrac{\partial v}{\partial x} = 0 & \qquad \tfrac{\partial u}{\partial y} &= -\tfrac{u}{v}\,, \quad \tfrac{\partial v}{\partial y} = 1
\end{aligned}$$

Příklad. $\sqrt{1-x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $x = \sin u$, $y = v$:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos u & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\cos u} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial f}{\partial y} &= \tfrac{\partial g}{\partial v}\\
\tfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} &= \tfrac{\partial}{\partial x}\big(\tfrac{\partial f}{\partial y}\big) = \tfrac{\partial}{\partial x}\big(\tfrac{\partial g}{\partial v}\big)\\
&= \tfrac{\partial}{\partial u}\big(\tfrac{\partial g}{\partial v}\big)\cdot\tfrac{\partial u}{\partial x} + \tfrac{\partial}{\partial v}\big(\tfrac{\partial g}{\partial v}\big)\cdot\tfrac{\partial v}{\partial x} = \tfrac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}\cdot\tfrac{1}{\cos x}\\
\tfrac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} + \tfrac{\partial g}{\partial v} &= 0\\
\tfrac{\partial}{\partial v}\big(\tfrac{\partial g}{\partial u} + g\big) &= 0\\
\tfrac{\partial g}{\partial u} + g &= \varphi(u)\\
g(u,v) &= c_1(v)\,\mathrm{e}^{-u} + c_2(u)\\
f(x,y) &= c_1(y)\,\mathrm{e}^{\arcsin x} + \bar{c}_2(x)
\end{aligned}$$

Příklad. $\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y}\\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\frac{\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial f}{\partial x} &= \tfrac{\partial g}{\partial r}\cdot\cos\varphi - \tfrac{\partial g}{\partial \varphi}\cdot\tfrac{\sin\varphi}{r}\\
\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \tfrac{\partial}{\partial x}\big(\tfrac{\partial f}{\partial x}\big) = \tfrac{\partial}{\partial r}\big(\tfrac{\partial f}{\partial x}\big)\cdot\tfrac{\partial r}{\partial x} + \tfrac{\partial}{\partial \varphi}\big(\tfrac{\partial f}{\partial x}\big)\cdot\tfrac{\partial \varphi}{\partial x}\\
&= \big(\tfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}\cos\varphi - \tfrac{\partial^2 g}{\partial\varphi\,\partial r}\tfrac{\sin\varphi}{r} + \tfrac{\partial g}{\partial\varphi}\tfrac{\sin\varphi}{r^2}\big)\cos\varphi\\
&\quad - \big(\tfrac{\partial^2 g}{\partial\varphi\,\partial r}\cos\varphi - \tfrac{\partial g}{\partial r}\sin\varphi - \tfrac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}\tfrac{\sin\varphi}{r} - \tfrac{\partial g}{\partial\varphi}\tfrac{\cos\varphi}{r}\big)\cdot\tfrac{\sin\varphi}{r}\\
\triangle f &= \tfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \tfrac{1}{r^2}\tfrac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2} + \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial g}{\partial r}
\end{aligned}$$

Lokální extrémy funkcí více proměnných

f má v $\boldsymbol{a}$
lokální minimum: $f(\boldsymbol{x}) \ge f(\boldsymbol{a})$ na některém $P(\boldsymbol{a})$
lokální maximum: $f(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{a})$ na některém $P(\boldsymbol{a})$
lokální extrém: lokální minimum nebo lokální maximum
ostrý lokální extrém (maximum, minimum): ostrá nerovnost

Příklady.
1) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ má v $(0,0)$ ostré lokální minimum.
2) $f(x,y) = x^2y^2$ má v $(0,0)$ lokální minimum (neostré).
3) $f(x,y) = xy$ nemá v $(0,0)$ lokální extrém.

Poznámka. Funkce f má v $\boldsymbol{a}$ (ostré) lokální minimum právě tehdy, když funkce $-f$ má v $\boldsymbol{a}$ (ostré) lokální maximum.

Věta. *Nechť f má v $\boldsymbol{a}$ lokální extrém, $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$. Pak $f'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a})$ je buď nulová nebo neexistuje.*

Důkaz. $\varphi(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h})$
f má v $\boldsymbol{a}$ lokální extrém ... φ má v 0 lokální extrém
$f'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a})$ existuje ... $\varphi'(0) = f'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a})$ existuje, je nulová

Definice. Bod $\boldsymbol{a}$ nazýváme *stacionárním bodem* funkce f, jestliže všechny parciální derivace f jsou v $\boldsymbol{a}$ nulové.

druhý diferenciál: $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(\boldsymbol{a})\, h_i h_j$

Definice. Řekneme, že $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})$ je
pozitivně definitní, pokud $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) > 0$ pro každý $\boldsymbol{h} \ne 0$;
negativně definitní, pokud $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) < 0$ pro každý $\boldsymbol{h} \ne 0$;
indefinitní, pokud existují $\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}$ tak, že $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) < 0 < \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{k})$.

Příklady. (v $\mathbb{R}^3$)
1) $h_1^2 + 2h_2^2 + 5h_3^2$ je pozitivně definitní
2) $-2h_1^2 - h_2^2 - 4h_3^2$ je negativně definitní
3) $h_1^2 + 2h_2^2 - h_3^2$ je indefinitní: $(1,1,0) \mapsto 3$, $(0,0,1) \mapsto -1$
4) $h_1^2 + h_2^2 \ge 0$ není nic z výše uvedeného: $(0,0,1) \mapsto 0$ (pozitivně semidefinitní)

Věta. *Nechť f je třídy C^2 na otevřené množině G, $\boldsymbol{a} \in G$ je stacionární bod f. Pak platí:*
(1) Je-li $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})$ pozitivně definitní, pak f má v $\boldsymbol{a}$ ostré lokální minimum.
(2) Je-li $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})$ negativně definitní, pak f má v $\boldsymbol{a}$ ostré lokální maximum.
(3) Je-li $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})$ indefinitní, pak f nemá v $\boldsymbol{a}$ lokální extrém.

Důkaz (náznak). podle Taylorovy věty existuje $t \in (0,1)$:
$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h}) =$
$= f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h})$
1) spojité 2. derivace ... spojitý 2. diferenciál ... pozitivně definitní v okolí $U(\boldsymbol{a})$ ... pro $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h} \in P(\boldsymbol{a})$ je $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) > f(\boldsymbol{a})$
2) podobně
3) $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) < 0 < \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{k})$, ve směru $\boldsymbol{h}$ je je ostré lokální maximum, ve směru $\boldsymbol{k}$ ostré lokální minimum ... není lokální extrém

Poznámka. V $\mathbb{R}$ je $\mathrm{d}^2 f(a)(h) = f''(a)\,h^2$, definitnost je určena znaménkem.

Příklady. $\mathrm{d}^2 f(0,0)$ je nulový:
1) $f(x,y) = x^2y^2$ má v $(0,0)$ (neostré) lokální minimum.
2) $f(x,y) = x^3 + y^3$ nemá v $(0,0)$ lokální extrém.
2) $f(x,y) = x^4 + y^4$ má v $(0,0)$ ostré lokální minimum.

Příklad. Určete lokální extrémy $f(x,y) = 3x^2 - 6xy - 2y^3$.
$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, lokální extrémy jsou ve stacionárních bodech
$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 6y = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -6x - 6y^2 = 0$
stacionární body: $(0,0)$, $(-1,-1)$
$\mathrm{d}^2 f(x,y)(h_1,h_2) = 6h_1^2 - 12h_1h_2 - 12yh_2^2$
$\mathrm{d}^2 f(0,0)(h_1,h_2) = 6h_1^2 - 12h_1h_2 = 6[(h_1-h_2)^2 - h_2^2]$ je indefinitní
$\mathrm{d}^2 f(-1,-1)(h_1,h_2) = 6h_1^2 - 12h_1h_2 + 12h_2^2 = 6[(h_1-h_2)^2 + h_2^2]$ je pozitivně definitní
Funkce f má ostré lokální minimum $f(-1,-1) = -1$.

Hessova matice funkce f v bodě a:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

Označme

$$D_k = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_k}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k\,\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

Věta (Sylvestrovo kritérium). *Nechť f je třídy C^2.*
1) $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})$ je pozitivně definitní právě když $D_k > 0$ pro všechna $k = 1,\dots,n$.
2) $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})$ je negativně definitní právě když $(-1)^k D_k > 0$ pro všechna $k = 1,\dots,n$.
3) Pokud $D_n \ne 0$ a pokud nenastala ani jedna z předešlých možností, pak je $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})$ indefinitní.

Příklad. $f(x,y) = 3x^2 - 6xy - 2y^3$ (viz výše).
Hessova matice:

$$\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & -12y \end{pmatrix}$$

ve stacionárních bodech

$$(0,0)\colon \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D_1 = 6\,, \qquad D_2 = -36$$

$$(-1,-1)\colon \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}, \qquad D_1 = 6\,, \qquad D_2 = 36$$

Příklad. $f(x,y,z) = 2y - 2z - y^2 - \frac{1}{2}z^2 + 3xz - x^3$.
gradient $(3z - 3x^2, 2 - 2y, -2 - z + 3x)$
Hessova matice:

$$\begin{pmatrix} -6x & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ve stacionárních bodech

$$(1,1,1)\colon \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D_1 = -6,\ D_2 = 12,\ D_3 = 6$$

$$(2,1,4)\colon \begin{pmatrix} -12 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D_1 = -12,\ D_2 = 24,\ D_3 = -6$$

ostré lokální maximum $f(2,1,4) = 1$

$\boxed{\text{Vázané extrémy}}$

$f(\boldsymbol{x})$, $G \subset \mathbb{R}^n$, M: $g_1(\boldsymbol{x}) = 0, \ldots$ (vazby)

I. Snížení počtu proměnných

1. Vyjádření některých proměnných jako funkce jiných (řešení vazeb).

Příklad. $f(x,y) = y - x^2$, M: $2x - y = 0$
$y = 2x$
$g(x) = f(x, 2x) = 2x - x^2$
$g(1) = 1$ ostré lokální maximum
$f(1,2) = 1$ ostré lokální maximum vzhledem k M

2. Vyjádření některých proměnných jako funkce nových (parametrizace).

Příklad. $f(x,y) = x + y + 1$, M: $x^2 + 2x + y^2 = 0$
M: $(x+1)^2 + y^2 = 1$, kružnice: střed $(-1, 0)$, poloměr 1
M: $x = -1 + \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$
$g(t) = f(-1 + \cos t, \sin t) = \cos t + \sin t$
$g(-1 + \sqrt{2}/2) = \sqrt{2}$ ostré lokální maximum
$g(-1 + \sqrt{2}/2) = -\sqrt{2}$ ostré lokální minimum
$f(-1 + \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = \sqrt{2}$ ostré lok. max. vzhledem k M
$f(-1 - \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = -\sqrt{2}$ ostré lok. min. vzhledem k M

Poznámka. První postup je zvláštním případem druhého.

II. Lagrangeova metoda multiplikátorů

Předpoklady: $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $f \in C^1(G)$,
M: $g_1(\boldsymbol{x}) = 0, \ldots g_p(\boldsymbol{x}) = 0$, $p < n$, $g_1 \ldots g_p \in C^1(G)$,
$\operatorname{grad} g_1(\boldsymbol{x}), \ldots \operatorname{grad} g_p(\boldsymbol{x})$ jsou lineárně nezávislé na M:

$$\operatorname{hod} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} = p$$

($\operatorname{grad} g_i(\boldsymbol{x})$ je normálový vektor nadplochy dané rovnicí $g_i(\boldsymbol{x}) = 0$ v $\boldsymbol{x}$, tj. tyto nadplochy se protínají v útvaru dimenze $n - p$).

Princip: f „neroste" po M, tj. $\operatorname{grad} f$ je kolmý k M, tj. $\operatorname{grad} f$ je lineární kombinací normál nadploch, tj. pro „stacionární" bod $\boldsymbol{a}$ platí

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \lambda_1 g_1(\boldsymbol{a}) + \cdots + \lambda_p g_p(\boldsymbol{a}).$$

Postup: $F(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - \lambda_1 g_1(\boldsymbol{x}) - \cdots - \lambda_p g_p(\boldsymbol{x})$

$$\begin{array}{cc} \frac{\partial F}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) = 0 & g_1(\boldsymbol{x}) = 0 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) = 0 & g_p(\boldsymbol{x}) = 0 \end{array}$$

$n + p$ rovnic pro $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots \lambda_p$ dá stacionární body.
Místo $\mathrm{d}^2 f$ je účinnější vyšetřovat $\mathrm{d}^2 F$.

Příklad. $f(x,y) = x + y + 1$, M: $g(x,y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$
$\operatorname{grad} g(x,y) = (2x+1, 2y) = \boldsymbol{o}$ v $(-\frac{1}{2}, 0) \notin M$
$F(x,y) = x + y + 1 - \lambda(x^2 + 2x + y^2)$

$$\begin{array}{lr} \frac{\partial F}{\partial x}: & 1 - \lambda(2x+2) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}: & 1 - \lambda \cdot 2y = 0 \\ & x^2 + 2x + y^2 = 0 \end{array}$$

$(x_1, y_1) = (-1 + \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $\lambda_1 = \sqrt{2}/2$
$(x_2, y_2) = (-1 - \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}/2$
$\mathrm{d}^2 f(x_i, y_i)(\boldsymbol{h}) = 0$ extrémy neurčí
$\mathrm{d}^2 F(x,y)(\boldsymbol{h}) = -2\lambda h_1^2 - 2\lambda h_2^2$:
$f(x_1, y_1) = \sqrt{2}$ ostré lokální maximum vzhledem k M
$f(x_2, y_2) = -\sqrt{2}$ ostré lokální minimum vzhledem k M

Poznámka. Definitnost $\mathrm{d}^2 f$ ($\mathrm{d}^2 F$) stačí vyšetřovat na tečném prostoru, tj. pro vektory $\boldsymbol{h}$ splňující

$$\begin{array}{r} \boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad} g_1(\boldsymbol{a}) = 0\,, \\ \vdots \\ \boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad} g_p(\boldsymbol{a}) = 0\,, \end{array} \qquad \begin{pmatrix} \operatorname{grad} g_1(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} g_p(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} = 0$$

(rovnice jsou podle podmínky lineárně nezávislé).

Příklad. $f(x,y,z) = xyz$, M: $x + y - 1 = 0$, $y + z = 0$.

$$\operatorname{hod} \begin{pmatrix} \operatorname{grad} g_1(x,y,z) \\ \operatorname{grad} g_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \operatorname{hod} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \quad \text{v } \mathbb{R}^3$$

$F(x,y,z) = xyz - \lambda(x + y - 1) - \mu(y + z)$

$$\begin{array}{lr} \frac{\partial F}{\partial x}: & yz - \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}: & xz - \lambda - \mu = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}: & xy - \mu = 0 \\ & x + y - 1 = 0 \\ & y + z = 0 \end{array}$$

$(x_1, y_1, z_1) = (1, 0, 0)$, $\lambda_1 = \mu_1 = 0$
$(x_2, y_2, z_2) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$, $\lambda_2 = -\frac{4}{9}$, $\mu_1 = \frac{2}{9}$
$\mathrm{d}^2 f(x,y,z)(\boldsymbol{h}) = 2z h_1 h_2 + 2y h_1 h_3 + 2x h_2 h_3$
1) $\mathrm{d}^2 f(1,0,0)(\boldsymbol{h}) = 2 h_2 h_3$ je indefinitní (není to l. e. v $\mathbb{R}^3$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{h} = 0 \qquad \to \qquad h_2 = -h_1\,, \quad h_3 = h_1$$

$\mathrm{d}^2 f(1,0,0)(h_1, -h_1, h_1) = -2h_1^2$ je negativně definitní v h_1
$f(1,0,0) = 0$ je vázané ostré lokální maximum
2) $\mathrm{d}^2 f(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})(\boldsymbol{h}) = -\frac{4}{3} h_1 h_2 + \frac{4}{3} h_1 h_3 - \frac{2}{3} h_2 h_3$
$\mathrm{d}^2 f(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})(h_1, -h_1, h_1) = 2h_1^2$ je pozitivně definitní v h_1
$f(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = -\frac{4}{27}$ je vázané ostré lokální minimum

Maximum a minimum funkce

absolutní/globální extrémy

Věta. *Spojitá funkce na omezené uzavřené množině nabývá svého maxima i minima.*

Postup:
1) Lokální extrémy uvnitř.
2) Vázané extrémy na hranici.

Příklad. $f(x,y) = x^2+y^2-6x-4y+11$, M: $x^2+y^2-4x \le 5$
1) Lokální extrémy uvnitř:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial x}: &\quad 2x-6=0 \\ \tfrac{\partial f}{\partial y}: &\quad 2y-4=0 \end{aligned}$$

stacionární bod $(3,2) \in M$, $f(3,2) = -2$
2) Vázané extrémy na hranici:
$F(x,y) = x^2+y^2-6x-4y+11-\lambda(x^2+y^2-4x-5)$

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial F}{\partial x}: &\quad 2x-6-\lambda(2x-4)=0 \\ \tfrac{\partial F}{\partial y}: &\quad 2x-6-\lambda(2x-4)=0 \\ &\quad x^2+y^2-4x-5=0 \end{aligned}$$

$f(2+3/\sqrt{5}, 6/\sqrt{5}) = 12-6\sqrt{5} \doteq -1{,}4$
$f(2-3/\sqrt{5}, -6/\sqrt{5}) = 12+6\sqrt{5} \doteq 25{,}4$
$\max_M f = f(2-3/\sqrt{5}, -6/\sqrt{5}) = 12+6\sqrt{5}$,
$\min_M f = f(3,2) = -2$

Funkce zadané implicitně

$F(x,y) = 0 \to y = f(x)$

Příklady.
1) $x^2+y^2-1=0$: kružnice, pro $x \in \langle -1,1\rangle$ je:
$y_1(x) = \sqrt{1-x^2}$, $y_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$
2) $x^2+y^2+1=0$: $\emptyset$
3) $(x-1)^2+(y+3)^2=0$: bod $(1,-3)$
4) $|xy|-xy=0$: $\langle 0,\infty)^2 \cup (-\infty,0\rangle^2$

Věta. *Nechť $F(x,y)$ je funkce třídy C^1 v okolí (a,b), $F(a,b)=0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \ne 0$. Pak existuje okolí U bodu a a funkce $f \in C^1(U)$ tak, že $f(a)=b$, $F\big(x,f(x)\big)=0$ na U a*

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\big(x,f(x)\big)}{\frac{\partial F}{\partial y}\big(x,f(x)\big)} \quad \text{na } U\,.$$

Poznámka. Je-li $\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) \ne 0$, pak $x = g(y)$ v okolí b.

Důkaz (druhé části). Derivací $F\big(x,f(x)\big) = 0$ podle x dostaneme

$$\tfrac{\partial F}{\partial x}\big(x,f(x)\big) + \tfrac{\partial F}{\partial y}\big(x,f(x)\big)\cdot f'(x) = 0\,.$$

Poznámka. Derivace vyšších řádů (je-li F patřičné třídy C^k) dostaneme dalším derivováním, například:

$$\tfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,f' + \big(\tfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} + \tfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} f'\big) f' + \tfrac{\partial F}{\partial y}\,f'' = 0$$

Příklad. Určete lokální extrémy funkce $y(x)$ dané implicitně rovnicí $x^2+y^2=1$.
$F(x,y) = x^2+y^2-1=0$
$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2y$ je nenulové pro $y \ne 0$.
derivací rovnice $x^2+y^2(x)-1=0$ podle x dostaneme

$$2x+2y(x)\,y'(x) = 0\,, \qquad y'(x) = -\tfrac{x}{y(x)}$$

stacionární body $(0,1)$, $(0,-1)$
druhou derivací rovnice podle x dostaneme ($y'(x)=0$)

$$2+2y'^2(x)+2y(x)\,y''(x) = 0\,, \qquad y''(x) = -\tfrac{1}{y(x)}$$

$(0,1)$: $y_1''(0) = -1/2 < 0$, ostré lokální maximum
$(0,-1)$: $y_2''(0) = 1/2 > 0$, ostré lokální minimum

Věta. *Nechť $F(\boldsymbol{x},y)$ je funkce třídy C^1 v okolí $(\boldsymbol{a},b)$, $F(\boldsymbol{a},b)=0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{a},b) \ne 0$. Pak existuje okolí U bodu $\boldsymbol{a}$ a funkce $f \in C^1(U)$ tak, že $f(\boldsymbol{a})=b$, $F\big(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x})\big)=0$ na U a*

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = -\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}\big(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x})\big)}{\frac{\partial F}{\partial y}\big(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x})\big)},\dots,\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}\big(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x})\big)}{\frac{\partial F}{\partial y}\big(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x})\big)}\right) \quad \text{na } U\,.$$

Poznámka. $\operatorname{grad} F(\boldsymbol{x},y)$ je normálový vektor nadplochy dané rovnicí $F(\boldsymbol{x},y)=0$, tj. grafu implicitně zadané funkce. Speciálně pro $z=f(x,y)$ a $F(x,y,z) = f(x,y)-z$ je

$$\operatorname{grad} F = \big(\tfrac{\partial f}{\partial x}, \tfrac{\partial f}{\partial y}, -1\big) = (\operatorname{grad} f, -1)$$

Věta. *Nechť $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ ($\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$) jsou funkce třídy C^1 v okolí $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, $F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = G(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0$ a*

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) & \frac{\partial F}{\partial y_2}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \\ \frac{\partial G}{\partial y_1}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) & \frac{\partial G}{\partial y_2}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \end{pmatrix} \ne 0\,.$$

Pak existuje okolí U bodu $\boldsymbol{a}$ a funkce $f,g \in C^1(U)$ tak, že $\big(f(\boldsymbol{a}),g(\boldsymbol{a})\big) = \boldsymbol{b}$ a $F\big(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{x})\big) = G\big(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{x})\big) = 0$ na U.

Příklad. Ověřte, že rovnice $x+y-u-v=0$, $ux+vy-2=0$ v okolí bodu $(1,-1,1,-1)$ definují funkce $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ v okolí bodu $(1,-1)$. Určete $\operatorname{grad} u(1,-1)$.
Funkce $F(x,y,u,v) = x+y-u-v$, $G(x,y,u,v) = ux+vy-2$ jsou třídy $C^1(\mathbb{R}^4)$, bod $(1,-1,1,-1)$ vyhovuje podmínkám,

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ x & y \end{pmatrix} = x-y$$

je v bodě $(1,-1,1,-1)$ nenulový.
Parciálními derivacemi rovnic podle x,y dostaneme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial x}: &\quad 1-\tfrac{\partial u}{\partial x}-\tfrac{\partial v}{\partial x}=0 &\quad \tfrac{\partial u}{\partial x}(-1,1)+\tfrac{\partial v}{\partial x}(-1,1)=1 \\ &\quad \tfrac{\partial u}{\partial x}\,x+u+\tfrac{\partial v}{\partial x}\,y=0 &\quad \tfrac{\partial u}{\partial x}(-1,1)-\tfrac{\partial v}{\partial x}(-1,1)=-1 \\ \tfrac{\partial}{\partial y}: &\quad 1-\tfrac{\partial u}{\partial y}-\tfrac{\partial v}{\partial x}=0 &\quad \tfrac{\partial u}{\partial x}(-1,1)+\tfrac{\partial v}{\partial x}(-1,1)=1 \\ &\quad \tfrac{\partial u}{\partial y}\,x+\tfrac{\partial v}{\partial y}\,y+v=0 &\quad \tfrac{\partial u}{\partial x}(-1,1)-\tfrac{\partial v}{\partial x}(-1,1)=1 \end{aligned}$$

vyřešením: $\operatorname{grad} u(1,-1) = (0,1)$