

Výrokový počet

Pravdivostní hodnoty:

pravda P ano + true 1 aj.
nepravda N ne - false 0 aj.

Př.: $M1 \dots$ 1. osoba je muž

$M2 \dots$ 2. osoba je muž

$S1 \dots$ 1. osoba je svobodná

$S2 \dots$ 2. osoba je svobodná

$V \dots$ mohou se vzít

$V = \{ [(\overline{ne} M1) \overline{a} M2]$
 $\overline{nebo} [M1 \overline{a} (\overline{ne} M2)] \}$
 $\overline{a} S1 \overline{a} S2$

Konvence: $X \overline{a} Y \rightarrow X \cdot Y$
 $X \overline{nebo} Y \rightarrow X + Y$
 $\overline{ne} X \rightarrow \overline{X}$
pravda $\rightarrow 1$
nepravda $\rightarrow 0$

Př.: $V = (\overline{M1} \cdot M2 + M1 \cdot \overline{M2}) \cdot S1 \cdot S2$

UPS5 P • 1

27.3.1995 © A. Pluháček

Boolova algebra (logická algebra)

logický $\stackrel{?}{=}$ Boolův (boolovský) [G. Boole]

Boolovy (logické) funkce (operace):

X	\overline{X}
0	1
1	0

\overline{X} funkce NE, NOT, negace, inverze

$X \cdot Y$ funkce I, AND, logický součin, konjunkce, ...

$X + Y$ funkce NEBO, OR, logický součet, disjunkce, ...

Shannonův expanzní teorém:

$$f(a, b, \dots, c) = a \cdot f(1, b, \dots, c) + \overline{a} \cdot f(0, b, \dots, c)$$

Důkaz: vztah platí pro všechna a (pro $\forall a \in \{0, 1\}$)

Důsledek: $f(a, b, \dots, c) = a \cdot g(b, \dots, c) + \overline{a} \cdot h(b, \dots, c)$

Každá logická funkce se dá zapsat pomocí logického součinu, součtu a negace

UPS5 P • 2

8.3.2000 © A. Pluháček

Zákony Booleovy algebry

⊙ komutativní ⊙

$$x + y = y + x$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

asociativní

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

⊙ distributivní ⊙

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

$$(x \cdot y) + z = (x + z) \cdot (y + z)$$

⊙ o neutrálnosti 0a 1⊙

$$x + 0 = x$$

$$x \cdot 1 = x$$

o agresivnosti 0a 1

$$x \cdot 0 = 0$$

$$x + 1 = 1$$

o idempotenci prvků

$$x + x = x$$

$$x \cdot x = x$$

⊙ vyloučeného třetího ⊙

$$x + \overline{x} = 1$$

$$x \cdot \overline{x} = 0$$

o dvojí negaci

$$\overline{\overline{x}} = x$$

De Morganova pravidla

$$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$

⊙ Huntingtonovy axiomy ⊙

UPS5 P • 3

31.3.1996 © A. Pluháček

Princip duality:

platí zákon $\mathcal{Z} \Rightarrow$ platí duální zákon \mathcal{Z}^*

$\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}^*$: $+ \rightarrow \cdot$
 $\cdot \rightarrow +$
 $0 \rightarrow 1$
 $1 \rightarrow 0$

Př. — viz zákony Booleovy algebry

Př.: $x + x \cdot y = x \cdot (1 + y) = x \cdot 1 = x$

Př.: $x + \overline{x} \cdot y = (x + \overline{x}) \cdot (x + y) = 1 \cdot (x + y) = x + y$

Další zákony Booleovy algebry

absorpce

$$x + x \cdot y = x$$

$$x \cdot (x + y) = x$$

absorpce negace

$$x + \overline{x} \cdot y = x + y$$

$$x \cdot (\overline{x} + y) = x \cdot y$$

UPS5 P • 4

8.3.2000 © A. Pluháček

Pozorování:

- Je-li číslo dělitelné 2 nebo 3, není prvočíslem.
 X ... Číslo je dělitelné 2.
 Y ... Číslo je dělitelné 3.
 Z ... Číslo není prvočíslem.
 $(X + Y) \rightarrow Z = \overline{X + Y} + Z$ (implikace)
 Všimněme si výrazu uvnitř závorky.

(Implikaci nechme stanou.)

 X nebo Y : 1 nebo 1 = 1

- Bude hodný, nebo dostane pár facek.
 X ... Bude hodný.
 Y ... Dostane pár facek.

 X nebo Y : 1 nebo 1 = 0

 Tzv. „vylučovací nebo“ $X \oplus Y$
Další logické funkce

X	Y	1	2	3	4	5	...
0	0	0	1	1	1	1	...
0	1	1	0	1	0	1	...
1	0	1	0	1	0	0	...
1	1	0	0	0	1	1	...

- vylučovací NEBO, XOR [eXclusive OR], nonekvivalence, součet modulo 2, ...
 $X \oplus Y = X \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot Y$
- funkce ANI, NOR, Pierceova funkce, ...
 $X \downarrow Y = \overline{X + Y}$
- funkce NAND, Shefferova funkce, ...
 $X | Y = \overline{X \cdot Y}$
- ekvivalence
 $X \sim Y = X \cdot Y + \overline{X} \cdot \overline{Y}$
- implikace
 $X \rightarrow Y = \overline{X} + Y$

Kontaktní síť

1. kontakt	2. kontakt	paral. spoj.	ser. spoj.
nevede	nevede	nevede	nevede
nevede	vede	vede	nevede
vede	nevede	vede	nevede
vede	vede	vede	vede

0 ... nevede

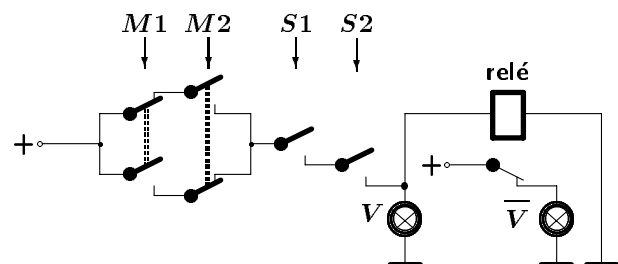
1 ... vede

1. kontakt	2. kontakt	paral. spoj.	ser. spoj.
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

paralelní spojení: logický součet (funkce NEBO)

seriové spojení: logický součin (funkce I)

rozpojovací kontakt: negace (funkce NE)



$$V = (\overline{M1} \cdot M2 + M1 \cdot \overline{M2}) \cdot S1 \cdot S2$$

$$\begin{aligned} \overline{V} &= \overline{(\overline{M1} \cdot M2 + M1 \cdot \overline{M2}) \cdot S1 \cdot S2} = \\ &= \overline{\overline{M1} \cdot M2} + \overline{M1 \cdot \overline{M2}} + \overline{S1} + \overline{S2} = \\ &= \overline{\overline{M1}} + \overline{M2} + \overline{M1} + \overline{\overline{M2}} + \overline{S1} + \overline{S2} = \\ &= (M1 + \overline{M2}) \cdot (\overline{M1} + M2) + \overline{S1} + \overline{S2} = \\ &= M1 \cdot \overline{M2} + \overline{M1} \cdot M2 + \overline{S1} + \overline{S2} \end{aligned}$$

Shannonův teorém:

$$\varphi(x, \dots, y, +, \cdot, 0, 1) = \varphi(\overline{x}, \dots, \overline{y}, \cdot, +, 1, 0)$$

(zobecnění De Morganových teoremů)

$$\overline{V} = (M1 + \overline{M2}) \cdot (\overline{M1} + M2) + \overline{S1} + \overline{S2}$$

Kontakty?

- mechanické:
1. velké rozměry
 2. malá rychlost
 3. nízká spolehlivost

obvody CMOS

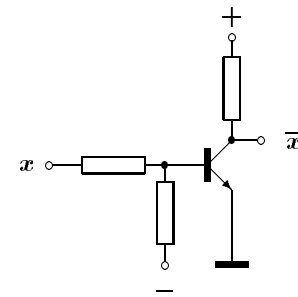
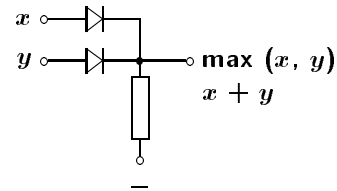
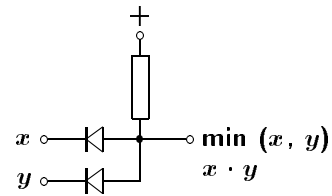
Elektronické obvody (polovodičové)

0 „nízké napětí“ L (např. $0 \div 0,8$ V)

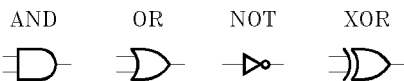
1 „vysoké napětí“ H (např. $2 \div 5$ V)

↑ pozitivní logika: 0 ~ L, 1 ~ H

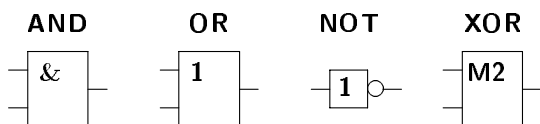
negativní logika: 0 ~ H, 1 ~ L



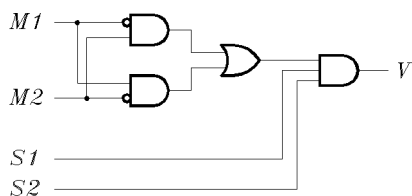
Schematické značky logických členů



negace: $\overline{a \cdot b}$



Př.: $V = (\overline{M1} \cdot M2 + M1 \cdot \overline{M2}) \cdot S1 \cdot S2$



Př.: Majorita ze tří — je rovna 1 právě, když

většina proměnných (2 nebo 3) je rovna 1;

označuje se např. $M_3(x, y, z)$ nebo $x \# y \# z$.

$$M_3 = \overline{x} y z + x \overline{y} z + x y \overline{z} + x y z$$

$$1 \times \text{OR}_4 + 4 \times \text{AND}_3 + 3 \times \text{NOT}$$

8 logických členů 19 vstupů

$$M_3 = \overline{x} y z + x \overline{y} z + x y (\overline{z} + z)$$

$$M_3 = \overline{x} y z + x \overline{y} z + x y$$

$$1 \times \text{OR}_3 + 2 \times \text{AND}_3 + 1 \times \text{AND}_2 + 2 \times \text{NOT}$$

6 logických členů 14 vstupů

$$xyz = xyz + xyz + xyz$$

$$M_3 = \overline{x} y z + x y z + x \overline{y} z + x y z + x y \overline{z} + x y z$$

$$M_3 = y z + x z + x y$$

$$1 \times \text{OR}_3 + 3 \times \text{AND}_2$$

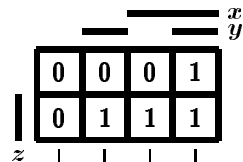
4 logické členy 9 vstupů

Př.: majorita ze tří — $M_3(x, y, z)$

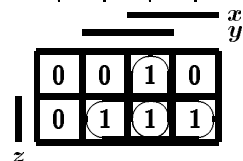
x	y	z	M_3
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Pravdivostní tabulka

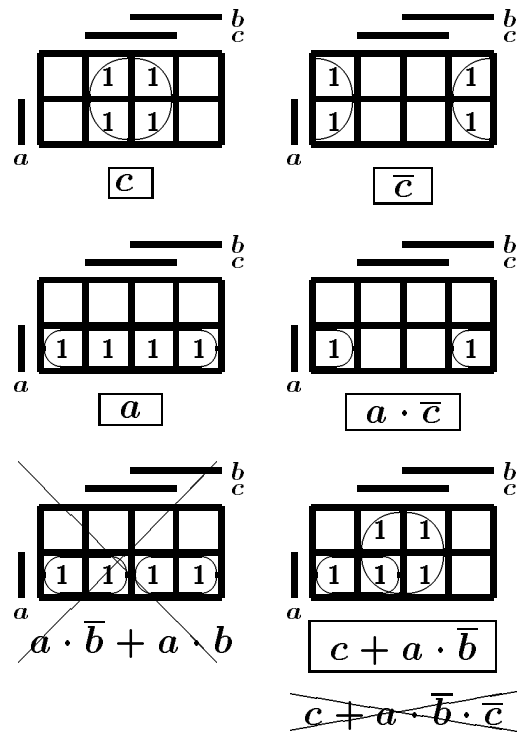
Svobodova mapa



Karnaughova mapa

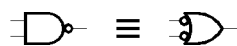


Algebraický výraz: $M_3(x, y, z) = xy + xz + yz$

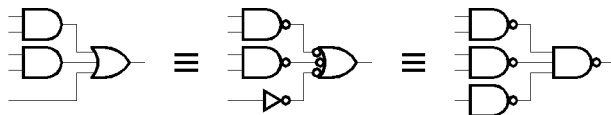


Použití členů NAND

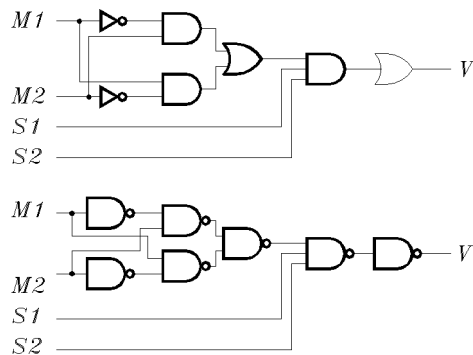
De Morganovo pravidlo:



Z toho plyne:



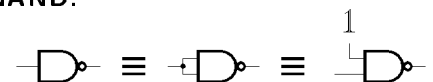
Př.:



Použití členů NAND

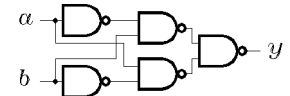
2

1 vstupový člen NAND:

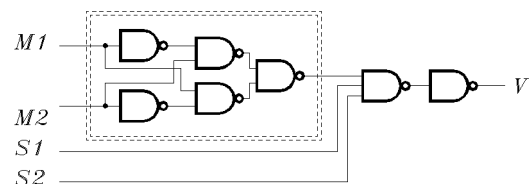
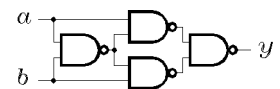


XOR:

$$y = a \oplus b = a\bar{b} + \bar{a}b$$



$$y = a \oplus b = a\bar{b} + 0 + \bar{a}b + 0 = a\bar{b} + \bar{a}b + \bar{a}b + \bar{b}b = a(\bar{a} + \bar{b}) + (\bar{a} + \bar{b})b = a \cdot \bar{a}b + \bar{a}b \cdot b$$



Sčítačky

a, b bity sčítanců p přenos z nižšího řádu
 s bit součtu q přenos do vyššího řádu

úplná sčítačka

a	b	p	q	s
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

$$q = M_3(a, b, p)$$

$$s = a \oplus b \oplus p$$

$$q = ab + ap + bp$$

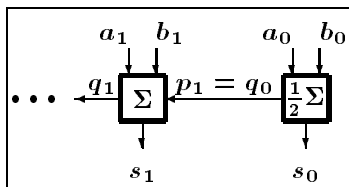
$$s = \bar{a}\bar{b}p + \bar{a}b\bar{p} + a\bar{b}\bar{p} + abp$$

půlsčítačka
 (poloviční
 sčítačka)

a	b	q	s
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

$$q = a \cdot b$$

$$s = a \oplus b = \bar{a}b + a\bar{b}$$



Dekodér

a	b	c	y_0	y_1	y_2	\dots	y_7
0	0	0	1	0	0	...	0
0	0	1	0	1	0	...	0
0	1	0	0	0	1	...	0
0	1	1	0	0	0	...	0
1	0	0	0	0	0	...	0
1	0	1	0	0	0	...	0
1	1	0	0	0	0	...	0
1	1	1	0	0	0	...	1

$$y_0 = \bar{a}\bar{b}\bar{c}$$

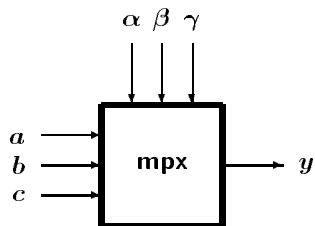
$$y_1 = \bar{a}\bar{b}c$$

$$y_2 = \bar{a}b\bar{c}$$

$$\vdots$$

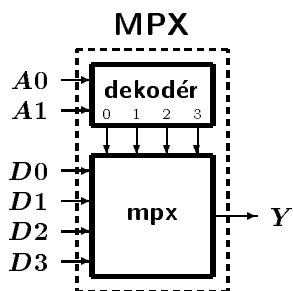
$$y_7 = abc$$

Multiplexory



α	β	γ	y
0	0	0	0
1	0	0	a
0	1	0	b
0	0	1	c
jinak			?

$$y = a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c \cdot \gamma$$

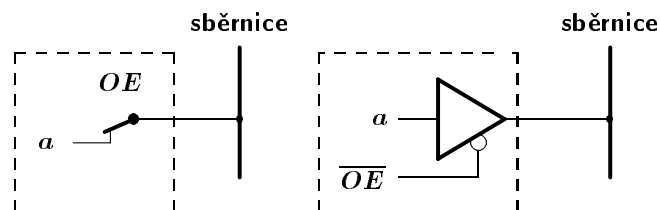


„adresa“		Y
$A1$	$A0$	Y
0	0	$D0$
0	1	$D1$
1	0	$D2$
1	1	$D3$

Připojení obvodů ke sběrnicím

3stavový výstup: 0, 1, Z

Z = stav vysoké impedance



otevřený kolektor:

