Laplaceova transformace

Definice. *Laplaceovým obrazem* funkce f definované na $\langle 0,\infty)$ je funkce

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\,,$$

pokud integrál konverguje pro alespoň jedno $p\in\mathbb{R}$.

Značení: $\mathscr{L}: f(t)\mapsto F(p)$, $\mathscr{L}\{f\}=F$, $f \stackrel{\triangle}{=} F$.

Příklady. e^{t^2} nemá Laplaceův obraz

$$\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{at}\}=\frac{1}{p-a}\,,\quad p>a$$

$$\mathscr{L}\{1\}=\frac{1}{p}\,,\quad p>0$$

Poznámky. 1) F se obvykle uvažuje jako funkce komplexní proměnné pro $\mathrm{Re}\,p>p_f$.
2) Někdy se uvažují funkce $f(t)$ definované na $\mathbb{R}$, které jsou nulové pro $t<0$ – místo $\sin t$ na $\langle 0,\infty)$ se píše $\sin t\cdot \mathrm{H}(t)$, kde $\mathrm{H}(t)$ je tzv. *Heavisideova funkce* (někdy se bere $H(0)=\frac12$):

$$\mathrm{H}(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\ge 0.\end{cases}$$

Definice. Funkce $f(t)$ definovaná na $\langle 0,\infty)$ je *předmět standardního typu* (f *patří do třídy* $\mathscr{L}_0$), jestliže:
1) f je po částech spojitá,
2) f je *exponenciálního řádu* (α), tj. existují čísla $M,\alpha\in\mathbb{R}$:

$$|f(t)|\le M\,\mathrm{e}^{\alpha t},\quad t\in\langle 0,\infty)\,.$$

Věta. *Nechť f je předmět standardního typu exponenciálního řádu α. Pak Laplaceův obraz funkce f je definován na (α,∞) a* $\lim_{p\to\infty}F(p)=0$.

Důkaz. $\left|\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\right|\le\int_0^\infty |f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}|\,\mathrm{d}t\le$
$\le\int_0^\infty M\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty M\,\mathrm{e}^{-(p-\alpha)t}\,\mathrm{d}t=$
$=\left[-\frac{M}{p-\alpha}\,\mathrm{e}^{-(p-\alpha)t}\right]_0^\infty=\frac{M}{p-\alpha}$ pro $p>\alpha$.

Příklady.

$$\mathscr{L}\{\sin t\}=\frac{1}{p^2+1}\,,\quad p>0$$

$$\mathscr{L}\{\cos t\}=\frac{p}{p^2+1}\,,\quad p>0$$

Věta (o linearitě)**.** *Jsou-li $f,g\in\mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $a,b\in\mathbb{R}$, pak*

$$\mathscr{L}\{af+bg\}=a\,\mathscr{L}\{f\}+b\,\mathscr{L}\{g\}\,,\quad (p>\alpha)\,.$$

Důkaz. Přímý důsledek linearity integrálu.

Věta (o derivaci obrazu)**.** *Je-li $f\in\mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $F=\mathscr{L}\{f\}$, pak*

$$\mathscr{L}\{t\cdot f(t)\}=-F'(p)\,,\quad p>\alpha\,.$$

Důkaz (náznak). $F'(p)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=$
$=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\right)\mathrm{d}t=\int_0^\infty f(t)\,(-t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=$
$=-\int_0^\infty\big(t\,f(t)\big)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=-\mathscr{L}\{t\,f(t)\}$

Příklad.

$$\mathscr{L}\{t^n\}=\frac{n!}{p^{n+1}}\,,\quad p>0\,.$$

Věta (o integraci obrazu)**.** *Je-li $f\in\mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $F=\mathscr{L}\{f\}$ a existuje-li vlastní* $\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t}$, *pak*

$$\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_p^\infty F(q)\,\mathrm{d}q\,,\quad p>\alpha\,.$$

Poznámka. $\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=-\int F(p)$, integrační konstanta se určí z podmínky $\lim_{p\to\infty}F(p)=0$.

Věta (o substituci [posunu] v obrazu)**.** *Je-li $f\in\mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $F=\mathscr{L}\{f\}$, $a\in\mathbb{R}$, pak*

$$\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{at}\,f(t)\}=F(p-a)\,,\quad p>\alpha+a\,.$$

Důkaz. $|\,\mathrm{e}^{at}\,f(t)|\le\mathrm{e}^{at}\,M\,\mathrm{e}^{\alpha t}=M\,\mathrm{e}^{(\alpha+a)t}$
$\int_0^\infty\mathrm{e}^{at}\,f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{(a-p)t}\,\mathrm{d}t=F(p-a)$

Příklad. $\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{at}\sin t\}=\frac{1}{(p-a)^2+1}$, $p>a$

Věta (o změně měřítka)**.** *Je-li $f\in\mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $F=\mathscr{L}\{f\}$, $a>0$, pak*

$$\mathscr{L}\{f(at)\}=\frac{1}{a}\,F\left(\frac{p}{a}\right)\,,\quad p>a\cdot\alpha\,.$$

Důkaz. $|f(at)|\le M\,\mathrm{e}^{\alpha(at)}=M\,\mathrm{e}^{(a\alpha)t}$
$\int_0^\infty f(at)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=\left|\begin{matrix}at=u\\ a\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}u\end{matrix}\right|=\frac1a\int_0^\infty f(u)\,\mathrm{e}^{-(p/a)u}\,\mathrm{d}u=$
$\frac1a\,F\left(\frac1a\right)$

Příklady.

$$\mathscr{L}\{\sin\omega t\}=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\,,\quad p>0$$

$$\mathscr{L}\{\cos\omega t\}=\frac{p}{p^2+\omega^2}\,,\quad p>0$$

Zpětná Laplaceova transformace

Věta. *Jsou-li $f_1, f_2 \in \mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $\mathscr{L}\{f_1\} = \mathscr{L}\{f_2\}$ na (α, ∞), pak $f_1(t) = f_2(t)$ na $\langle 0, \infty)$ s výjimkou nejvýše spočetně mnoha izolovaných bodů.*

Věta. *Racionální funkce je Laplaceovým obrazem funkce třídy $\mathscr{L}_0$ právě tehdy, když je ryze lomená. Pak je obrazem na intervalu (α, ∞), kde α je největší reálná část kořenů jmenovatele.*

Důkaz. $\Rightarrow$: $\lim_{t\to\infty} F(p) = \infty$
$\Leftarrow$: rozklad na součet parciálních zlomků

$$\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{at}\} = \frac{1}{p-a}\,, \qquad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-a}\right\} = \mathrm{e}^{at}$$

$$\mathscr{L}\{t^n\,\mathrm{e}^{at}\} = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}\,, \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-a)^n}\right\} = \frac{t^{n-1}\,\mathrm{e}^{at}}{(n-1)!}$$

pro kvadratické členy ve jmenovateli:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{p+C}{(p^2+bp+c)^n}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(p+\frac{b}{2}) + (C-\frac{b}{2})}{[(p+\frac{b}{2})^2 + c - \frac{1}{4}\,b^2]^n}\right\}$$
$$= \mathrm{e}^{-\frac{b}{2}t}\Bigg[\underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2+\omega^2)^n}\right\}}_{f_n(t)} + \tfrac{2C-b}{2}\,\underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+\omega^2)^n}\right\}}_{g_n(t)}\Bigg]$$

$$f_1(t) = \cos\omega t\,, \qquad f_{n+1}(t) = \tfrac{1}{2n}\,t\,g_n(t)$$
$$f_2(t) = \tfrac{1}{\omega}\sin\omega t\,, \quad g_{n+1}(t) = \tfrac{1}{2n\omega^2}\left[(2n-1)\,g_n(t) - t\,g_n'(t)\right]$$

Definice. *Konvoluce* funkcí $f, g \in \mathscr{L}_0$ je funkce

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-u)\,g(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

Vlastnosti:
1) komutativita: $f*g = g*f$
2) asociativita: $(f*g)*h = f*(g*h)$
3) distributivita ke sčítání: $f*(g+h) = (f*g)+(f*h)$

Věta (o obrazu konvoluce). *Jsou-li $f, g \in \mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $F = \mathscr{L}\{f\}$, $G = \mathscr{L}\{g\}$, pak*

$$\mathscr{L}\{(f*g)(t)\} = F(p)\cdot G(p)\,, \quad p > \alpha\,.$$

Důkaz (náznak). $\int_0^\infty \big(\int_0^t f(t-u)\,g(u)\,\mathrm{d}u\big)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t =$
$= \int_0^\infty \int_u^\infty f(t-u)\,g(u)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u =$
$= \int_0^\infty g(u)\,\mathrm{e}^{-pu}\big(\int_u^\infty f(t-u)\,\mathrm{e}^{-p(t-u)}\,\mathrm{d}t\big)\,\mathrm{d}u \overset{(t-u=v)}{=}$
$= \int_0^\infty g(u)\,\mathrm{e}^{-pu}\big(\int_0^\infty f(v)\,\mathrm{e}^{-pv}\,\mathrm{d}v\big)\,\mathrm{d}u =$
$= \big(\int_0^\infty f(v)\,\mathrm{e}^{-pv}\,\mathrm{d}v\big)\cdot\big(\int_0^\infty g(u)\,\mathrm{e}^{-pu}\,\mathrm{d}u\big) = F(p)\cdot G(p)$

Poznámky.
1) $\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\cdot G(p)\} = (f*g)(t)$.
2) $(\mathrm{H}*f)(t) = \int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t$, tj. věta o obrazu integrálu je zvláštním případem věty o obrazu konvoluce.

Diferenciální a integrálně diferenciální rovnice

Zobrazíme Laplaceovou transformací, vyřešíme algebraickou rovnici, provedeme zpětnou transformaci.

Věta (o obrazu derivace). *Je-li $f' \in \mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $F = \mathscr{L}\{f\}$ a $f(0+) = \lim_{t\to 0+} \in \mathbb{R}$, pak*

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = p\cdot F(p) - f(0+)\,, \quad (p > \max\{\alpha, 0\})\,.$$

Důkaz. $\int_0^\infty f'(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} u = \mathrm{e}^{-pt} & v' = f'(t) \\ u' = -p\,\mathrm{e}^{-pt} & v = f(t) \end{vmatrix} =$
$= \big[f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\big]_0^\infty + \int_0^\infty p\,f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = -f(0+) + p\cdot F(p)$

Důsledek.

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}\} = p^n\,\mathscr{L}\{f\} - \\ - p^{n-1}f(0+) - \cdots - p\,f^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+)$$

Věta (o obrazu integrálu). *Je-li $f \in \mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $F = \mathscr{L}\{f\}$, pak*

$$\mathscr{L}\big\{\textstyle\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\big\} = \frac{F(p)}{p}\,, \quad (p > \max\{\alpha, 0\})\,.$$

Důkaz. $g(t) = \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$, $g(0+) = 0$
$F(p) = \mathscr{L}\{g'(t)\} = p\,\mathscr{L}\{g(t)\} - g(0+) = p\,\mathscr{L}\{g(t)\}$

Věta (o translaci). *Je-li $f \in \mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $a \geq 0$, pak*

$$\mathscr{L}\{f(t)\ \mathrm{H}(t-a)\} = \mathrm{e}^{-ap}\,\mathscr{L}\{f(t+a)\}\,, \quad p > \alpha$$
$$\mathscr{L}\{f(t-a)\ \mathrm{H}(t-a)\} = \mathrm{e}^{-ap}\,\mathscr{L}\{f(t)\}\,, \quad p > \alpha$$

Důkaz. $\mathscr{L}\{f(t-b)\,\mathrm{H}(t-a)\} =$
$= \int_0^\infty f(t-b)\,\mathrm{H}(t-a)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_a^\infty f(t-b)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \overset{(t-a=u)}{=}$
$= \int_0^\infty f(u+a-b)\,\mathrm{e}^{-p(u+a)}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-ap}\,\mathscr{L}\{f(t+a-b)\}$
první vztah dostaneme pro $b = 0$, druhý pro $b = a$

Konečný impuls: $f(t)$ na omezeném intervalu $\langle a, b)$:

$$f(t)\cdot[\,\mathrm{H}(t-a) - \mathrm{H}(t-b)]\,.$$

Věta (o obrazu periodické funkce). *Je-li $f \in \mathscr{L}_0$ periodická funkce s periodou T, pak f je exponenciálního řádu 0 a její obraz je*

$$F(p) = \frac{\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{-pT}}\,, \quad p > 0\,.$$

Důkaz. $\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t =$
$= \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} t = u+nT \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}u \end{vmatrix} =$
$= \sum_{n=0}^\infty \int_0^T f(u)\,\mathrm{e}^{-p(u+nT)}\,\mathrm{d}u =$
$= \sum_{n=0}^\infty (\mathrm{e}^{-pT})^n \int_0^T f(u)\,\mathrm{e}^{-pu}\,\mathrm{d}u =$
$= \big(\int_0^T f(u)\,\mathrm{e}^{-pu}\,\mathrm{d}u\big)/(1-e^{-pT})$