$\boxed{\textbf{Prostory } \mathbb{R}^n}$

Euklidovský prostor $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$: n-rozměrné aritmetické vektory $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ s operacemi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) && \text{součet} \\ a\boldsymbol{x} &= (ax_1, \dots, ax_n) && \text{skalární násobek} \\ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} &= x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n && \text{skalární součin} \end{aligned}$$

počátek O kartézského systému souřadnic, bodový prostor

1) $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, …, $\boldsymbol{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ tvoří (standardní) ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$.
2) *Nulový vektor*: $\boldsymbol{o} = (0, 0, \dots, 0)$.
3) *Norma* (euklidovská): $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.
4) Vzájemně jednoznačná korespondence mezi body a vektory: $X = O + \boldsymbol{x}$.
5) *Vzdálenost bodů* X, Y: $\|\overrightarrow{XY}\| = \|Y - X\|$.

Základní vlastnosti normy:
(1) $\|\boldsymbol{x}\| > 0$ pro $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ ($\|\boldsymbol{o}\| = 0$),
(2) $\|a \cdot \boldsymbol{x}\| = |a| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$,
(3) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ (trojúhelníková nerovnost).

Další vlastnosti:
1) $|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$ (Schwarzova nerovnost pro eukl. normu),
2) $\max_{i=1,\dots,n} |x_i| \leq \|\boldsymbol{x}\| \leq \sqrt{n} \cdot \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$.

Důkaz (2). Odmocníme
$\max_{i=1,\dots,n} x_i^2 \leq x_1^2 + \cdots + x_n \leq n \cdot \max_{i=1,\dots,n} x_i^2$

Poznámky.
Supremová norma: $\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{M}} = \sup\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$.
Součtová norma: $\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{S}} = |x_i| + \cdots + |x_n|$.
Všechny normy jsou ekvivalentní:

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{M}} \leq \|\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{S}} \leq n \cdot \|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{M}} .$$

Definice. *Diametr* (*průměr*) neprázdné množiny $M \subset \mathbb{R}^n$:

$$\operatorname{diam}(M) = \sup\{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| : x, y \in M\} .$$

Poznámka. $\operatorname{diam}(\emptyset) = 0$.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá *omezená*, má-li konečný diametr.

Poznámka. Množina je omezená právě tehdy, když jsou omezené vzdálenosti jejích bodů od počátku, tj. omezené jsou množiny všech souřadnic.

Definice. *ε-okolí bodu* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$U(\boldsymbol{x}, \varepsilon) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| < \varepsilon\} .$$

Prstencové ε-okolí bodu $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$P(\boldsymbol{x}, \varepsilon) = U(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \setminus \{\boldsymbol{x}\} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : 0 < \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| < \varepsilon\} .$$

Definice. Nechť $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $M \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\boldsymbol{x}$ je
1) *vnitřní bod* M, pokud existuje okolí $U(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \subset M$,
2) *vnější bod* M, pokud existuje okolí $U(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$ disjunktní s M (tj. $M \subset \mathbb{R}^n \setminus M$),
3) *hraniční bod* M, pokud každé okolí bodu $\boldsymbol{x}$ má neprázdný průnik s M i s $(\mathbb{R}^n \setminus M)$,
4) *hromadný bod* M, pokud každé prstencové okolí bodu $\boldsymbol{x}$ má neprázdný průnik s M,
5) *izolovaný bod* M, pokud existuje prstencové okolí bodu $\boldsymbol{x}$ disjunktní s M.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$.
1) *Vnitřek* M (M^0) je množina všech vnitřních bodů M.
2) *Hranice* M (∂M) je množina všech hraničních bodů M.
3) *Uzávěr* M ($\overline{M}$) je $M^0 \cup \partial M$.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá
1) *otevřená*, je-li rovna svému vnitřku,
2) *uzavřená*, je-li rovna svému uzávěru.

Poznámky.
1) Množina nemusí být ani otevřená, ani uzavřená.
2) Otevřené a zároveň uzavřené (tzv. obojetné) množiny v $\mathbb{R}^n$ jsou pouze $\emptyset$ a $\mathbb{R}^n$.
3)Jednobodové množiny jsou uzavřené.
4) Množina je otevřená právě tehdy, když její doplněk je uzavřená množina.
5) Průnik dvou a sjednocení libovolně mnoha otevřených množin je otevřená množina.
6) Sjednocení dvou a průnik libovolně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.

Věta. *Každá omezená nekonečná množina v $\mathbb{R}^n$ má alespoň jeden hromadný bod.*

Důkaz (návod). Podobně jako princip vnořených intervalů.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá *souvislá*, jestliže neexistují otevřené množiny $O_1, O_2 \subset \mathbb{R}^n$ takové, že:
(1) $O_1 \cap O_2 = \emptyset$,
(2) $O_1 \cup O_2 \supset M$,
(3) $O_1 \cap M, O_2 \cap M \neq \emptyset$.

Poznámky.
1) $\emptyset$ a $\mathbb{R}^n$ jsou souvislé.
2) Jednobodové množiny jsou souvislé.
3) Otevřená množina není souvislá právě tehdy, když je sjednocením dvou disjunktních otevřených množin.
4) V $\mathbb{R}$ jsou souvislé $\emptyset$, jednobodové množiny, intervaly (nic jiného).

Věta. *Otevřená množina v $\mathbb{R}^n$ je souvislá právě tehdy, když každé dva její body lze spojit lomenou čarou ležící v této množině.*

Definice. Otevřená souvislá množina se nazývá *oblast*.

Posloupnosti v $\mathbb{R}^n$

Definice. *Posloupnost* v $\mathbb{R}^n$ je zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$.

$$1 \mapsto 1.\ \text{člen}\ \boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^n$$
$$2 \mapsto 2.\ \text{člen}\ \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^n$$
$$\dots$$

$(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$

Definice. Posloupnost $(\boldsymbol{x}_k)$ *má limitu* $\boldsymbol{x}$, pokud pro každé okolí U bodu $\boldsymbol{x}$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $k > k_0$ je $\boldsymbol{x}_k \in U$.

$\boldsymbol{x}_k \in U(\boldsymbol{x}, \varepsilon)\ \dots\ \ \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\| < \varepsilon$
$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}\ \dots\ \ \lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\| = 0$

Věta (o konvergenci po složkách). *Nechť $(\boldsymbol{x}_k)$ je posloupnost v $\mathbb{R}^n$. Pak $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}$ právě tehdy, když*

$$\lim_{k\to\infty} x_{k,i} = x_i \quad \text{pro každé } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Důkaz. $(k \to \infty)$

$$\begin{array}{ccccc} \max_i |x_{k,i} - x_i| & \leq & \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\| & \leq & \sqrt{n}\max_i |x_{k,i} - x_i| \\ \downarrow & \Leftarrow & \downarrow & \Leftarrow & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Důsledek. *Věty o limitě součtu, rozdílu, násobku, vybrané posloupnost, jednoznačnosti, ... platí i v $\mathbb{R}^n$.*

Definice. Nechť $M \subset D(f)$. Řekneme, že funkce f má v bodě $\boldsymbol{a}$ *limitu b vzhledem k M*, jestliže $\boldsymbol{a}$ je hromadný bod M a pro každé okolí U bodu b existuje prstencové okolí P bodu $\boldsymbol{a}$ tak, že $f(P \cap M) \subset U$. Píšeme

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x}\in M}} f(\boldsymbol{x}) = b\,.$$

(Je-li $M = D(f)$, pak podmínku $\boldsymbol{x} \in M$ nepíšeme.)

Příklad. $n = 1$, $M = (a, \infty)\ \dots$ limita zprava.

Věta. *Je-li $\boldsymbol{a}$ hromadný bod $D(f)$, pak $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = b$ právě tehdy, když $\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x}\in M}} f(\boldsymbol{x}) = b$ pro všechny $M \subset D(f)$ takové, že $\boldsymbol{a}$ je hromadný bod M.*

Příklady.

1) $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=kx}} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} = \frac{k^2}{1+k^4}$

2) $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=kx}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = 0$, $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x^2}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \frac{1}{2}$

3) $\lim_{x\to0} \lim_{y\to0} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to0} 1 = 1$,

$\lim_{y\to0} \lim_{x\to0} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to0} 0 = 0$

Poznámka. Věty o limitách a spojitosti se dají zobecnit z $n = 1$. (Limita a spojitost součtu, rozdílu, součinu, podílu, složené funkce, ...)

Funkce v $\mathbb{R}^n$

Definice. *(Reálná) funkce n proměnných* je zobrazení $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$, kde $D(f) \subset \mathbb{R}^n$ je *definiční obor* funkce f. $R(f) = f(D(f))$ je *obor hodnot* funkce f.

Poznámky.
1) V prostorech „malé“ dimenze místo $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ píšeme (x, y), (x, y, z), ...
2) Vypouštíme „opakované“ závorky – místo $f((x_1, \dots, x_n))$ píšeme $f(x_1, \dots, x_n)$.
3) Pod pojmem funkce rozumíme reálnou funkci n proměnných.

Definice. *Graf funkce* f je množina

$$\text{Graf } f = \{(\boldsymbol{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1}\colon \boldsymbol{x} \in D(f),\ y = f(\boldsymbol{x})\}\,.$$

Definice. *Hladina konstantnosti* funkce f příslušná $c \in \mathbb{R}$:

$$\{\boldsymbol{x} \in D(f)\colon f(\boldsymbol{x}) = c\} = f^{-1}(c)\,.$$

Řez grafu je průnik grafu s rovinou v $\mathbb{R}^{n+1}$ rovnoběžnou s poslední osou.

Definice. *Vektorová funkce* je zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$
$f(x_1, \dots, x_n) = \big(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n)\big)$
$f = (f_1, \dots, f_k)$
Podobně jako pro posloupnosti vyšetřujeme limity „po složkách“, tj. limity $f_1, \dots, f_n$.