Číselné řady

$\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = \mathbb{R}^*$
$\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$
$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Definice. Nechť $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost čísel. (*Nekonečná číselná*) *řada* je výraz

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \,.$$

Číslo a_k se nazývá *k-tý člen* této řady.

Poznámka. Obecněji:
$\sum_{k=n}^{\infty} a_k$, $n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$
$\sum_{k \in M} a_k$, M je množina: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$

Definice. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nazýváme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *n-tý částečný součet* řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Pokud existuje $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, pak ji nazýváme *součtem řady* a píšeme $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
Řekneme, že řada:
konverguje, je-li $s \in \mathbb{C}$;
diverguje, je-li $s \in \{\pm\infty, \infty\}$;
osciluje, pokud $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje.

Příklady.
1) $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ diverguje: $s_n = n$, $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$.
2) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ osciluje: $s_n = 1$ pro n sudé, $s_n = 0$ pro n liché.
3) $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \lim_{n\to\infty}(1 - 2^{-n}) = 1$ konverguje.
4) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots$ osciluje v $\mathbb{R}$, diverguje v $\mathbb{C}$: $s_{2n-1} = n$, $s_{2n} = -n$.

Poznámka. „Lepší“ sčítání je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_n$, pro příklad 2) dá součet $\frac{1}{2}$.

Definice. *Aritmetická řada* s *diferencí* d:

$$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \big(a + (k-1)d\big) \,.$$

Součty

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ &= \tfrac{1}{2}(a_1 + a_n) + \tfrac{1}{2}(a_2 + a_{n-1}) + \cdots + \tfrac{1}{2}(a_n + a_1) \\ &= \tfrac{1}{2} n (a_1 + a_n) \,, \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \begin{cases} +\infty, & d > 0 \text{ nebo } d = 0 \,,\ a > 0 \,, \\ -\infty, & d < 0 \text{ nebo } d = 0 \,,\ a < 0 \,, \\ 0, & d = 0 \,,\ a = 0 \,. \end{cases}$$

Příklad. $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$.

Definice. *Geometrická řada* s *kvocientem* q:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} \,.$$

Součty

$$\begin{aligned} s_n &= a(1 + q + \cdots + q^{n-1}) \\ q s_n &= a(\phantom{1 +{}} q + \cdots + q^{n-1} + q^n) \\ (1-q) s_n &= a(1 - q^n) \\ s_n &= \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q} \,, & q \neq 1 \\ na \,, & q = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = \frac{a}{1-q} \,, \quad |q| < 1$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} &= \begin{cases} \infty \,, & q \geq 1 \,, \\ \text{neex.}, & q \leq -1 \end{cases} \quad \text{v } \mathbb{R} \\ &= \begin{cases} \infty \,, & |q| > 1 \text{ nebo } q = 1 \,, \\ \text{neex.}, & |q| = 1,\ q \neq 1 \end{cases} \quad \text{v } \mathbb{C} \end{aligned}$$

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3^k} = \frac{4/3}{1 - 1/3} = 2$.

Příklad. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots =$
$= \sum_{k=2}^{\infty} \big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\big) = \lim_{n\to\infty} \big(1 - \frac{1}{n}\big) = 1$.

Věta. *Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergují, $c \in \mathbb{C}$, pak*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \,,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k \,.$$

Věta. *Komplexní řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje právě tehdy, když konvergují řady $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$. Pak*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k + \mathrm{j} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k \,.$$

Věta (nutná podmínka konvergence). *Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, pak $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.*

Důkaz. $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} (s_k - s_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} s_k - \lim_{k\to\infty} s_{k-1} = s - s = 0$.

Věta. *Je-li $a_k \geq 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ existuje.*

Důkaz. $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, (s_n) je neklesající, tj. $\lim_{n\to\infty} s_n$ existuje $(= \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n)$

Kriteria konvergence

Věta (srovnávací kriterium)**.** *Nechť $0 \le a_k \le b_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.*
1) Konverguje-li $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, pak i $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.
2) Diverguje-li $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, pak i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverguje.

Důkaz. $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, $0 \le s_n \le t_n$
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n \le \lim_{n\to\infty} t_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Příklady.
1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \le 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + 1 = 2$ konverguje.
2) $\alpha \ge 2$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \le 2$ konverguje.
3) *harmonická řada*:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} &= 1 + \tfrac12 + \tfrac13 + \tfrac14 + \tfrac15 + \tfrac16 + \tfrac17 + \tfrac18 + \cdots \\ &\ge 1 + \tfrac12 + \left(\tfrac14 + \tfrac14\right) + \left(\tfrac18 + \tfrac18 + \tfrac18 + \tfrac18\right) + \cdots \\ &= 1 + \tfrac12 + \tfrac12 + \tfrac12 + \cdots = +\infty\,.\end{aligned}$$

4) $\alpha \in (0,1\rangle$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \ge \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverguje.

Věta (podílové kriterium)**.** *Nechť $0 < a_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Je-li pro každé $k \in \mathbb{N}$*
1) $\frac{a_{k+1}}{a_k} \le q < 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje;
2) $\frac{a_{k+1}}{a_k} \ge 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Důkaz.
1) $a_{k+1} \le a_k q \cdots \le a_1 q^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \le \sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1}{1-q}$
2) $a_{k+1} \ge a_k \ge \cdots \ge a_1$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ge \sum_{k=1}^{\infty} a_1 = +\infty$

Poznámka. Stačí, aby byly nerovnosti splněny pro dostatečně velká k, tj. počínaje některým k_0.

Věta (limitní tvar podílového kriteria)**.** *Nechť $0 \le a_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Je-li*
1) $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje;
2) $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Příklady.
1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konverguje: $\frac{a_k+1}{a_k} = \frac{1}{k+1} \to 0$.
2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k}$ diverguje: $\frac{a_k+1}{a_k} = \frac{k+1}{2} \to +\infty$.
3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ – kr. nerozhodne: $\frac{a_k+1}{a_k} = \frac{k}{k+1} \nearrow 1$ (diverguje).
4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ – kr. nerozhodne: $\frac{a_k+1}{a_k} = \frac{k^2}{(k+1)^2} \nearrow 1$ (konv.).

Věta (odmocninové kriterium)**.** *Nechť $0 \le a_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Je-li pro každé $k \in \mathbb{N}$*
1) $\sqrt[k]{a_k} \le q < 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje;
2) $\sqrt[k]{a_k} \ge 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Důkaz. 1) $a_k \le q^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \le \sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$
2) $a_k \ge 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ge \sum_{k=1}^{\infty} 1 = +\infty$

Věta (limitní tvar odmocninového kriteria)**.** *Nechť $0 \le a_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Je-li*
1) $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} < 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje;
2) $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} > 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Příklady.
1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{\ln^k(k+1)}$ konverguje: $\sqrt[k]{a_k} = \frac{\sqrt[k]{3}}{\ln(k+1)} \to 0 < 1$.
2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^{10}}$ diverguje: $\sqrt[k]{a_k} = \frac{2}{\sqrt[k]{k}^{10}} \to 2 > 1$.
3) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$ kriterium nerozhodne: $\sqrt[k]{a_k} = \frac{k}{k+1} \nearrow 1$,
$\lim_{k\to\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-1}\right] = \mathrm{e}^{-1} \ne 0$ – diverguje.

Poznámky.
1) Stačí uvažovat $\limsup_{k\to\infty} < 1$, $\liminf_{k\to\infty} > 1$.
2) Odmocninové kriterium je účinnější (ne, pokud existují obě limity), ale někdy se hůře počítá.

Příklad. $a_{2k-1} = 2^{-k}$, $a_{2k} = 2^{1-k}$
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac12 + 1 + \frac14 + \frac12 + \frac18 + \frac14 + \cdots$
$\sqrt[k]{a_k} \to 2^{-1/2} < 1$ – konverguje podle odmocninového kr.
$\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = 2$ – podílové kriterium nerozhodne

Věta (integrální kriterium)**.** *Nechť f je nezáporná nerostoucí integrovatelná funkce na $\langle 1, +\infty)$. Pak $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Důkaz. $f(k) \ge \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \ge f(k+1)$,
$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \le f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

Příklady.
1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverguje: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^{\infty} = +\infty$.
2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ konverguje pro $\alpha > 1$: $\int_1^{\infty} x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha-1}$.
3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ diverguje: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x = [\ln\ln x]_1^{\infty} = +\infty$.

Příklad. Jaká je chyba $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi}{6}$, pokud sečteme prvních 100 členů?
$\sum_{k=101}^{\infty} a_k \ge \int_{101}^{\infty} x^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{100} = 0{,}001$
$\sum_{k=101}^{\infty} a_k \le \int_{100}^{\infty} x^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{101} \doteq 0{,}0099$

Věta (Leibnizovo kriterium)**.** *Nechť $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$ konverguje právě tehdy, když $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.*

Důkaz. $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$
$s_1 \ge s_3 \ge s_5 \ge \cdots$, $s_{2k+1} \to s'$,
$s_2 \le s_4 \le s_6 \le \cdots$, $s_{2k} \to s'' \le s'$
$s' - s'' = \lim_{k\to\infty} (s_{2k+1} - s_{2k}) = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} a_k$

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac12 + \frac13 - \frac14 + \cdots (= \ln 2)$ konverguje: střídají se znaménka, $(|a_k|)_k = \left(\frac{1}{k}\right)_k$ je nerostoucí, konverguje k 0.

Absolutní konvergence

Definice. Řekneme, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje absolutně*, pokud konverguje $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ konverguje, ne absolutně: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ nekonverguje.

Věta. *Konverguje-li* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, *pak konverguje* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Důkaz. 1) $a_k \in \mathbb{R}$: $a^+ = \max\{a, 0\}$, $a^- = \max\{-a, 0\}$
$a = a^+ - a^-$, $|a| = a^+ + a^-$, $0 \le a^+, a^- \le |a|$
$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje ...
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konvergují (srovnávací kriterium) ...
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^+ - a_k^-) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konv.
2) $a_k \in \mathbb{C}$: $0 \le |\operatorname{Re} a_k|, |\operatorname{Im} a_k| \le |a_k|$
$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje ...
$\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Re} a_k|$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im} a_k|$ konvergují (srovnávací kr.) ...
$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$ konvergují podle 1) ...
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k + \mathrm{j}\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$ konverguje

Poznámka. Pokud reálná řada konverguje neabsolutně, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = +\infty$.

Poznámka. Srovnávací, podílové, odmocninové a integrální kriterium jsou kriteria absolutní konvergence:
$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konv., $|a_k| \le b_k$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. abs.
$\lim_{k\to\infty} |a_{k+1}/a_k| < 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. abs.
$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. abs.

Věta (sčítání po částech)**.** *Nechť* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje absolutně. Pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ *konvergují (absolutně) a jejich součet je roven součtu původní řady.*

Důkaz. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k-1}|, \sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k}| \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ... (absolutní) konvergence

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} = a_1 + a_3 + \cdots = a_1 + 0 + a_3 + 0 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} l_k$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} = a_2 + a_4 + \cdots = 0 + a_2 + 0 + a_4 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} s_k$$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} l_k + \sum_{k=1}^{\infty} s_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Poznámka. Absolutně konvergentní řadu můžeme rozdělit na konečně mnoho různě přeskládaných částí, součet se přitom nezmění.

Definice. *Přerovnáním řady* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nazýváme každou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}$, kde $f\colon \mathbb{N} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{N}$ je prosté zobrazení.

Věta. *Jestliže řada konverguje absolutně, pak každé její přerovnání konverguje absolutně a má stejný součet.*

Důkaz.
1) $a_k \ge 0$: označme $m_n = \max\{f(1), \ldots, f(n)\}$
$\sum_{k=1}^{n} a_{f(k)} \le \sum_{k=1}^{m_n} a_k$, tedy $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)} \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k$
opačná nerovnost: první řada je přerovnáním druhé pro f^{-1}
2) $a_k \in \mathbb{R}$:
$\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$
3) $a_k \in \mathbb{C}$: rozkladem na reálnou a imaginární část

Tvrzení. *Jestliže reálná řada nekonverguje absolutně a její členy konvergují k nule, pak každé reálné číslo je součtem některého přerovnání dané řady.*

Důkaz (náznak). $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = +\infty$, $c \in \mathbb{R}$
vybíráme nezáporné členy, dokud součet nebude $\ge c$
vybíráme záporné členy, dokud součet nebude $\le c$
(postup opakujeme)

Poznámka. Podobně lze dosáhnout i součtu $\pm\infty$.